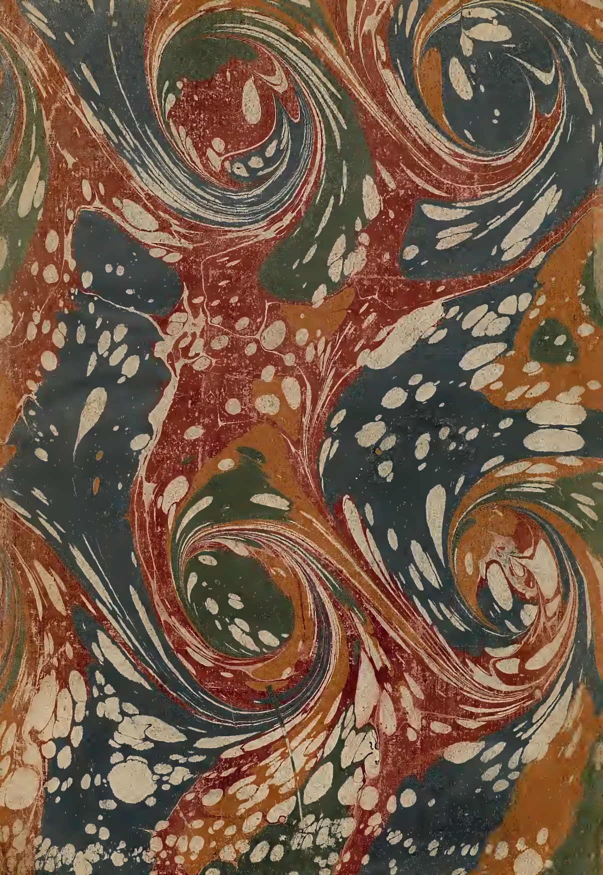



EX BIBLIOTECA
D. A. de VLLOA



Sal 77
n 124

NOUVELLE MECANIQUE OU STATIQUE;

DONT LE PROJET FUT DONNÉ EN M. DC. LXXXVII.

Ouvrage posthume de M. VARIGNON, *des Académies Royales des Sciences de France, d'Angleterre & de Prusse, Lecteur du Roy en Philosophie au College Royal, & Professeur des Mathématiques au College Mazarin.*

TOME PREMIER.





A PARIS,
Chez CLAUDE JOMBERT, ruë S. Jacques, au coin de la ruë des Mathurins, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XXV.
Avec Approbation & Privilege du Roy.

AVERTISSEMENT.

DEs que M. *Varignon* eût découvert que les mouvemens composez expliquoient avec une grande facilité l'emploi des forces dans les Machines ; qu'ils donnoient exactement les rapports de ces forces, selon quelque direction qu'on les y supposât placées, avantage qui manquoit aux méthodes que l'on avoit suivies avant lui : il s'attacha à en faire l'application aux Machines simples ; & en 1685. dans l'*Histoire de la République des Lettres*, il donna un Memoire sur les Poulies à moufles, dans lequel il se servoit des mouvemens composez pour déterminer tout ce que l'on peut desirer sur cette espèce de Machine.

En 1687. il publia son *Projet d'une Nouvelle Mécanique*. Cet Ouvrage entierement fondé sur la composition des mouvemens, ne contenoit de principes que ce qu'il en falloit à ceux qui possedoient déja cette Science. Aussi ne le rendoit-il public que pour sçavoir le sentiment des Géométres sur ce nouveau Systême. Le jugement qu'ils en ont porté, l'a engagé à en faire un Traité complet de Mécanique, qui servît à apprendre cette Science à fonds. Il y travailloit encore lorsqu'il est mort. Il ne lui restoit qu'à mettre dans l'ordre qui convenoit à tout l'ouvrage, les Problêmes qui en devoient être la derniere partie.

M. *de Fontenelle* à qui M. *Varignon* a légué ses papiers, a remis ce Traité à M. *de Beaufort* de l'Aca-

démie Royale des Sciences, qui s'eſt chargé du ſoin de l'Edition avec M. l'Abbé *Camus*. Tout eſt ici tel que l'Auteur l'a laiſſé. Il n'y a que les Problêmes, qui étant demeurez ſans ordre, ont été arrangez comme on a pû juger qu'ils l'euſſent été par M. *Varignon* lui-même.

On a ajoûté deux petits Traitez qui dépendent de la Mécanique, & qui étoient dignes d'être conſervez. Le premier regarde la Machine ſans frottemens, dont parle M. *Perrault* dans ſon *Commentaire ſur Vitruve*. L'analyſe que M. *Varignon* en fait, indiquera la maniere dont on doit juger des autres Machines, en y appliquant la méthode des mouvemens compoſez.

Le ſecond Traité eſt l'Examen de l'opinion de M. *Borelli* ſur les Poids ſuſpendus à des cordes; on le donne comme M. *Varignon* l'avoit mis à la ſuite de ſon Projet de Mécanique; à cela prés que quelques-unes des propoſitions de cet Examen ſe trouvant déja dans le corps de l'Ouvrage, on s'eſt contenté de les citer.

On a crû devoir conſerver l'Epitre Dedicatoire à Meſſieurs de l'Académie Royale des Sciences, & la Préface qui étoient à la tête du Projet de cette Mécanique, l'Auteur n'en ayant point compoſé d'autres: enfin on y a joint l'Eloge de ce grand Géométre par le Secretaire de l'Académie.

Dans la ſuite on donnera au Public tout ce que l'on trouvera de M. *Varignon* en état de lui être donné. On commencera par ſon commerce de Lettres avec les plus fameux Mathématiciens de l'Europe.



A MESSIEURS DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES.



ESSIEURS,

Je n'ai pas crû devoir exposer au jugement du Public ce Projet d'une Nouvelle Mécanique, sans m'appuyer

à

d'une aussi grande autorité que la vôtre, moi qui n'ai encore aucun nom dans les Lettres, & qui dois par consequent me défier de ces premiers mouvemens que l'amour des Sciences inspire à ceux qui commencent à s'y appliquer. Sans cela on pourroit justement m'accuser de quelque temerité, d'avoir entrepris de découvrir dans cette matiere ce que tant de sçavans Auteurs n'ont pas découvert; & je craindrois de m'être laissé tromper par ces illusions flateuses de la nouveauté, qui abusent d'ordinaire les hommes, lorsqu'ils se piquent d'avoir des opinions particulieres. Je puis dire néanmoins, MESSIEURS, *que ce n'est pas l'ambition de me signaler par des idées extraordinaires qui m'a poussé à écrire ce petit Traité; c'est un essai que j'ai voulu faire de mes forces pour être connu de vous, & pour vous donner occasion de m'encourager dans l'étude que j'ai embrassée. Si je n'ai pas tout ce qui est necessaire pour instruire les autres, j'ai du moins toute la docilité qu'il faut pour être instruit : je ne me flatte point aussi d'avoir établi des principes certains dans ce Projet, ni d'en pouvoir tirer des consequences infaillibles. Vous en jugerez mieux que personne,* MESSIEURS, *vous qui pénetrez si avant dans les Sciences les plus relevées. On sçait que rien n'échappe à vos soins & à votre exactitude. La Nature si avare aux autres de ses trésors, & si obstinée à se cacher, n'a pû se défendre contre la*

pénétration de votre esprit, & contre la subtilité de vos recherches : Vous en avez plus découvert en vingt ans, qu'on n'avoit fait en plusieurs siecles. Vos Observations Astronomiques ont dévoilé (pour ainsi dire) des Planettes qui se déroboient à nos yeux ; vos mesures si précises sur la terre, par rapport à celles que vous preniez en même tems dans le Ciel, ont rectifié mille erreurs de nos anciens Géographes. La Physique vous doit ce qu'elle a de plus curieux, soit dans la dissection du Corps humain & des Animaux, soit dans la description & dans l'analyse des Plantes, des Eaux & des Mineraux. Que ne vous doivent point aussi les Mathématiques en général pour tant d'Ouvrages célebres que vous avez mis au jour ? Enfin il n'y a point de Science que vous n'ayez perfectionnée, & que vous n'enrichissiez de tems en tems par vos travaux. Que n'attend-t'on pas encore de vous, animez comme vous êtes par les bienfaits d'un Grand Roy, qui veut rendre son Regne aussi glorieux par les Sciences & par les Arts, qu'il l'est déja par ses prodigieuses Conquêtes, & ses héroïques actions ? A quoi ne devez-vous pas aspirer vous-mêmes aujourd'hui sous la protection d'un Ministre si sage & si vigilant, qui excite tout le monde par ses ordres & par son exemple à illustrer & à célebrer un Regne si plein de merveilles ? Souffrez donc, MESSIEURS, *s'il vous plaît, vous qui êtes comme*

à la source de toutes les Sciences humaines, & à qui rien ne manque pour continuer vos recherches, & pour augmenter vos connoissances, que j'ose vous offrir & mettre au jour ce que j'ai puisé dans cette source; & qu'en essayant de vous suivre & de vous imiter, je puisse quelquefois profiter de vos lumieres, & vous assûrer que je suis avec une parfaite vénération,

MESSIEURS,

Votre très-humble & très-obéïssant serviteur,

VARIGNON.

PREFACE.

PREFACE.


L'ouverture du ſecond Tome des Lettres de M. Deſcartes, je tombai ſur un endroit de la 24. où il dit que *c'eſt une choſe ridicule, que de vouloir employer la raiſon du Levier dans la Poulie.* Cette réflexion m'en fit faire une autre; ſçavoir, s'il eſt plus raiſonnable de s'imaginer un Levier dans un poids qui eſt ſur un plan incliné, que dans une Poulie. Après y avoir penſé, il me ſembla que ces deux Machines étant pour le moins auſſi ſimples que le Levier, elles n'en devoient avoir aucune dépendance, & que ceux qui les y rapportoient, n'y étoient forcez, que parce que leurs principes n'avoient pas aſſez d'étenduë pour en pouvoir démontrer les proprietez indépendamment les unes des autres.

En effet en examinant ces principes un peu de près, il me parut qu'ils ne pouvoient ſervir tout au plus qu'à démontrer que *l'équilibre ſe trouve toûjours dans un Levier auquel ſont appliquez deux poids qui ſont entr'eux en raiſon reciproque des diſtances de leurs lignes de direction à ſon point d'appui*; encore n'étoit-ce qu'en ce cas : 1°. *Que ce Levier fût droit.* 2°. *Que ſon point d'appui fût entre les lignes de direction des poids qui y ſont appliquez.* 3°. *Que ces mêmes lignes*

fussent paralleles entr'elles, & perpendiculaires à ce Levier. Aussi Guid-Ubalde, & les autres qui s'en tiennent à la démonstration d'Archiméde, ont-ils été obligez de faire revenir de gré ou de force toutes sortes de Machines à cette espece de Levier, & de réduire de même tous les autres cas à celui-ci.

C'est peut-être ce qui a porté M. Descartes & M. Wallis à prendre une autre route. Quoi qu'il en soit, ce n'a pas été sans succès; puisque celle qu'ils ont suivie, conduit également à la connoissance des usages de chacune de ces Machines, sans être obligé de les faire dépendre l'une de l'autre; outre qu'elle a mené M. Wallis beaucoup plus loin qu'aucun Auteur, que je sçache, n'eût encore été de ce côté-là.

La comparaison que je fis de ces deux sortes de Principes, me fit sentir que ceux d'Archiméde n'étoient ni si étendus, ni si convainquans que ceux de M. Descartes & de M. Wallis; mais je ne sentis point que les uns ni les autres m'éclairassent beaucoup. J'en cherchai la raison, & ce défaut me parut venir de ce que ces Auteurs se sont tous plus attachez à prouver la necessité de l'équilibre, qu'à montrer la maniere dont il se fait.

Ce fut ce qui me fit prendre le parti d'épier moi-même la nature, & d'essayer si en la suivant pas à pas, je ne pourrois point appercevoir comment elle s'y prend, pour faire que deux puissances, soit égales, ou inégales, demeurent en

équilibre. Enfin je m'appliquai à chercher l'équilibre lui-même dans sa source, ou pour mieux dire, dans sa generation.

Le premier objet qui me vint à l'esprit, ce fut un poids qu'une puissance soûtient sur un plan incliné. D'abord je me le representai de telle figure que le concours de sa ligne de direction avec celle de cette puissance, se fit dans quelqu'un de ses points. De-là je vis aussi que leur concours d'action se faisant aussi par ce moyen dans ce seul point, il devenoit alors son centre de direction : de sorte que si ce plan eût manqué tout d'un coup, ce corps auroit necessairement suivi l'impression de ce point. Je cherchai ensuite quelle devoit être cette impression, & j'apperçûs que celles que faisoient sur ce point, & la pesanteur de ce poids, & la puissance qui le retenoit, étant les mêmes que s'il eût été poussé en même tems par deux forces qui leur eussent été égales, & qui eussent agi suivant leurs lignes de direction. J'apperçûs, dis-je, qu'il lui en résultoit une impression composée suivant une ligne qui étoit la diagonale d'un parallelogramme fait sous des parties de ces lignes de direction, qui étoient entr'elles comme ce poids & cette puissance. D'où je vis que l'impression de ce corps se faisoit alors suivant cette diagonale, qui devenoit en ce cas sa ligne de direction ; mais que ce plan lui étant perpendiculairement opposé, il la soûtenoit toute entiere ; ce qui faisoit que ce poids ainsi poussé

par le concours d'action de sa pesanteur & de la puissance qui lui étoit appliquée, demeuroit sur ce plan incliné de même que s'il eût été horisontal, & que cette impression composée n'eût été qu'un effet de sa pesanteur.

De cette pensée j'en vis naître plusieurs autres, & je m'apperçûs, 1°. Que toute l'impression que ce plan recevoit alors de ce poids ainsi soûtenu par cette puissance, se faisoit suivant cette diagonale. 2°. Que sa charge, c'est-à-dire, la force de cette même impression, étoit à ce poids & à cette puissance, comme cette même diagonale à chacun des côtez qui les représentent dans son parallelogramme. 3°. Que ce poids & cette puissance étoient toûjours entr'eux comme ces mêmes côtez, c'est-à-dire, en raison réciproque des sinus des angles que font leurs lignes de direction avec cette diagonale, ou (ce qui revient au même) en raison réciproque des distances de quelque point que ce soit de cette diagonale à leurs lignes de direction. Je vis enfin presque tout à la fois quantité de choses toutes nouvelles, qu'on verra dans les Corollaires de la Proposition des Surfaces.

Aprés avoir ainsi trouvé la maniere dont l'équilibre se fait sur des plans inclinez, je cherchai par le même chemin comment des poids soûtenus avec des cordes seulement, ou appliquez à des Poulies, ou bien à des Leviers, font équilibre entr'eux, ou avec les puissances qui les soû-

tiennent ; & j'apperçûs de même que tout cela se faisoit encore par la voye des mouvemens composez, & avec tant d'uniformité, que je ne pûs m'empêcher de croire que cette voye ne fût véritablement celle que suit la nature dans le concours d'action de deux poids ou de deux puissances, en faisant que leurs impressions particulieres, quelque proportion qu'elles ayent, se confondent en une seule, qui se décharge toute entiere sur le point où se fait cet équilibre : de sorte que la raison Physique des effets qu'on admire le plus dans les Machines, me parut être justement celle des mouvemens composez.

Je me démontrai d'abord par cette méthode, & sans le secours d'aucune Machine, les proprietez des poids suspendus avec des cordes, en quelque nombre qu'elles soient, & pour tous les angles possibles qu'elles peuvent faire entr'elles. Delà je passai à une démonstration des Poulies, qui comprend toutes les directions possibles des puissances ou des poids qui y sont appliquez, soit que le centre de ces Poulies demeure fixe, soit qu'on le suppose mobile. Ensuite au lieu de la démonstration qu'on ne fait ordinairement que pour les plans inclinez, j'en trouvai une qui s'étend généralement à toutes sortes de surfaces, & à toutes les directions possibles des puissances ou des poids qui y sont appliquez. Enfin d'une seule démonstration je découvris les proprietez de toutes les especes de Leviers, de quelque figure, & dans quel-

que ſituation qu'ils ſoient, & pour toutes les directions poſſibles des puiſſances ou des poids qui y ſont appliquez.

Des vûës ſi étenduës me ſurprirent; & l'évidence avec laquelle le détail de tout cela me paroiſſoit, indépendamment même du général, me confirma encore dans l'opinion où j'étois, qu'il faut entrer dans la génération de l'équilibre, pour y voir en ſoi, & pour y reconnoître les proprietez que tous les autres Principes ne prouvent tout au plus que par néceſſité de conſequence.

Il y a encore un avantage dans la route que je tiens, c'eſt qu'elle facilite extrêmement le calcul des forces, tant des poids que des puiſſances, en ce que leurs rapports y ſont toûjours déterminez immédiatement par les ſinus des angles que font leurs lignes de direction avec celle de l'impreſſion qui réſulte de leur concours d'action, & que cette méthode détermine pour le point où elles concourent. On y voit que lorſque deux puiſſances ou deux poids, ou bien une puiſſance & un poids font équilibre, ſoit avec des cordes ſeulement, ſoit à l'aide de quelque Poulie, de quelque Surface, ou de quelque Levier que ce ſoit, ils ſont toûjours entr'eux en raiſon réciproque des ſinus de ces mêmes angles.

J'avois deſſein d'expliquer avec cette méthode les effets les plus ſurprenans & les plus difficiles des Machines compoſées que l'on rencontre dans les arts & dans la nature; mais cela demandoit plus

de loiſir, & même un plus grand nombre d'experiences que l'état de ma fortune ne me peut permettre : c'eſt pour cela que je me ſuis déterminé à ne donner préſentement que les Propoſitions fondamentales de la Mécanique. Peut-être que de plus habiles gens que moi, & qui ſeront plus en état de faire cette entrepriſe, voudront bien ſe donner la peine d'en faire l'application à la Phyſique.

Mais en attendant je ne laiſſerai pas d'amaſſer tout ce que je pourrai d'experiences pour ce deſſein : c'eſt pourquoi je prie ceux qui n'auront pas en vûë d'y travailler, de vouloir bien me communiquer celles qu'ils croiront s'y pouvoir rapporter ; & ſur-tout de me faire part de tout ce qui leur viendra de difficultez ou de lumieres ſur les principes qu'on propoſe ici, leur promettant d'en uſer avec toute la docilité d'un homme qui ne cherche que la verité.





ELOGE

DE M. VARIGNON.

PIerre Varignon nâquit à Caën en 1654. d'un Architecte Entrepreneur, dont la fortune étoit fort médiocre. Il avoit deux freres, qui suivirent la profession du pere, & il étudia pour être Ecclesiastique.

Au milieu de cette éducation commune, qu'on donne aux jeunes gens dans les Colleges, tout ce qui peut les occuper un jour plus particulierement vient par differens hazards se presenter à leurs yeux ; & s'ils ont quelque inclination naturelle bien déterminée, elle ne manque pas de saisir son objet, dès qu'elle le rencontre. Comme les Architectes, & quelquefois les simples Maçons, sçavent faire des Cadrans, M. Varignon en vit tracer de bonne heure, & ne le vit pas indifferemment. Il en apprit la pratique la plus grossiere, qui étoit tout ce qu'il pouvoit apprendre de ses Maîtres; mais il soupçonnoit que tout cela dépendoit de quelque Théorie générale, soupçon qui ne servoit qu'à l'inquiéter, & à le tourmenter sans fruit. Un jour, pendant qu'il étoit en Philosophie aux Jesuites de Caën, feüilletant par amusement differens Livres dans la boutique d'un Libraire, il tomba sur un Euclide, & en lut les premieres pages, qui le charmerent non seulement par l'ordre & l'enchaînement des idées, mais encore par la facilité qu'il se sentit à y entrer. Comment l'esprit humain n'aimeroit-il pas ce qui lui rend témoignage de ses talens ? Il emporta l'Euclide chez lui, & en fut toûjours plus charmé par les mêmes raisons. L'incertitude éternelle, l'embarras Sophistique, l'obscurité inutile, & quelquefois affectée de la Philosophie des Ecoles, aiderent encore à lui faire goûter

goûter la clarté, la liaiſon, la ſûreté des veritez géométriques. La Géométrie le conduiſit aux ouvrages de Deſcartes, & il y fut frappé de cette nouvelle lumiere, qui de-là s'eſt répanduë dans tout le Monde penſant. Il prenoit ſur les neceſſitez abſoluës de la vie dequoi acheter des Livres de cette eſpece, ou plûtôt il les mettoit au nombre des neceſſitez abſoluës ; il falloit même, & cela pouvoit encore irriter la paſſion, qu'il ne les étudiât qu'en ſecret ; car ſes parens qui s'appercevoient bien que ce n'étoient pas-là les Livres ordinaires dont les autres faiſoient uſage, deſapprouvoient beaucoup, & traverſoient de tout leur pouvoir l'application qu'il y donnoit. Il paſſa en Théologie, & quoique l'importance des matieres, & la neceſſité dont elles ſont pour un Eccleſiaſtique, le fixaſſent davantage, ſa paſſion dominante ne leur fut pas entierement ſacrifiée.

Il alloit ſouvent diſputer à des Theſes dans les Claſſes de Philoſophie, & il brilloit fort par ſa qualité de bon argumenteur, à laquelle concouroient & le caractere de ſon eſprit, & ſa conſtitution corporelle, beaucoup de force & de netteté de raiſonnement d'un côté, & de l'autre une excellente poitrine, & une voix éclatante. Ce fut alors que M. l'Abbé de S. Pierre qui étudioit en Philoſophie dans le même College, le connut. Un goût commun pour les choſes de raiſonnement, ſoit Phyſiques, ſoit Métaphyſiques, & des diſputes continuelles, furent le lien de leur amitié. Ils avoient beſoin l'un de l'autre pour approfondir, & pour s'aſſûrer que tout étoit vû dans un ſujet. Leurs caracteres differens faiſoient un aſſortiment complet & heureux ; l'un par une certaine vigueur d'idées, par une vivacité féconde, par une fougue de raiſon ; l'autre par une analyſe ſubtile, par une préciſion ſcrupuleuſe, par une ſage & ingenieuſe lenteur à diſcuter tout.

M. l'Abbé de S. Pierre pour joüir plus à ſon aiſe de M. Varignon, le logea avec lui ; & enfin toûjours plus touché de ſon merite, il réſolut de lui faire une fortune,

qui le mît en état de ſuivre pleinement ſes talens & ſon génie. Cependant cet Abbé, cadet de Normandie, n'avoit que 1800 liv. de rente ; il en détacha 300 qu'il donna par Contrat à M. Varignon. Ce peu qui étoit beaucoup par rapport au bien du Donateur, étoit beaucoup auſſi par rapport aux beſoins & aux deſirs du Donataire. L'un ſe trouva riche, & l'autre encore plus d'avoir enrichi ſon ami.

L'Abbé perſuadé qu'il n'y avoit point de meilleur ſéjour que Paris pour des Philoſophes raiſonnables, vint en 1686. s'y établir avec M. Varignon dans une petite maiſon du Fauxbourg Saint Jacques. Là ils penſoient chacun de ſon côté, car ils n'étoient plus tant en communauté de penſées ; l'Abbé revenu des ſubtilitez inutiles & fatigantes, s'étoit tourné principalement du côté des reflexions ſur l'Homme, ſur les mœurs & ſur les principes du gouvernement. M. Varignon s'étoit totalement enfoncé dans les Mathématiques. J'étois leur compatriote, & allois les voir aſſez ſouvent, & quelquefois paſſer deux ou trois jours avec eux ; il y avoit encore de la place pour un ſurvenant, & même pour un ſecond ſorti de la même Province, aujourd'hui l'un des principaux Membres de l'Académie des Belles Lettres, & fameux par les Hiſtoires qui ont paru de lui. Nous nous raſſemblions avec un extrême plaiſir, jeunes, pleins de la premiere ardeur de ſçavoir, fort unis, & , ce que nous ne comptions peut-être pas alors pour un aſſez grand bien, peu connus. Nous parlions à nous quatre une bonne partie des differentes Langues de l'Empire des Lettres, & tous les Sujets de cette petite ſocieté ſe ſont diſperſez de-là dans toutes les Académies.

M. Varignon, dont la conſtitution étoit robuſte, au moins dans ſa jeuneſſe, paſſoit les journées entieres au travail : nul divertiſſement, nulle récréation, tout au plus quelque promenade à laquelle ſa raiſon le forçoit dans les beaux jours. Je lui ai oüi dire que travaillant après ſouper ſelon ſa coûtume, il étoit ſouvent ſurpris par des

Cloches qui lui annonçoient deux heures après minuit, & qu'il étoit ravi de se pouvoir dire à lui-même que ce n'étoit pas la peine de se coucher pour se relever à quatre heures. Il ne sortoit de-là ni avec la tristesse, que les matieres pouvoient naturellement inspirer, ni même avec la lassitude que devoit causer la longueur seule de l'application, il en sortoit gai & vif, encore plein des plaisirs qu'il avoit pris, impatient de recommencer. Il rioit volontiers en parlant de Géométrie ; & à le voir on eût cru qu'il la falloit étudier pour se bien divertir. Nulle condition n'étoit tant à envier que la sienne ; sa vie étoit une possession perpetuelle & parfaitement paisible de ce qu'il aimoit uniquement. Cependant si on eût eu à chercher un homme heureux, on l'eût été chercher bien loin de lui, & bien plus haut, mais on ne l'y eût pas trouvé.

Dans sa solitude du Fauxbourg Saint Jacques, il ne laissoit pas de lier commerce avec plusieurs Sçavans, & des plus illustres, tels que Messieurs du Hamel, du Verney, de la Hire. M. du Verney lui demandoit assez souvent des lumieres sur ce qu'il y a en Anatomie qui appartient à la Science des Mécaniques ; ils examinoient ensemble des positions de Muscles, leurs points d'appui, leurs directions, & M. du Verney apprenoit beaucoup d'Anatomie à M. Varignon, qui l'en payoit par des raisonnemens mathématiques appliquez à l'Anatomie.

Enfin en 1687. il se fit connoître du Public par son *Projet d'une Nouvelle Mécanique* dédié à l'Académie des Sciences. Elle étoit nouvelle en effet. Découvrir des veritez, & en découvrir les sources, ce sont deux choses qui peuvent d'abord paroître inséparables, & qui cependant sont souvent séparées, tant la Nature a été avare de connoissances à notre égard. En Mécanique dont il s'agit ici, on démontroit bien la necessité de l'Equilibre dans les cas où il arrive ; mais on ne sçavoit pas précisément ce qui le causoit. C'est ce que M. Varignon apperçut par la Théorie des Mouvemens composez,

& c'eſt ce qui fait tout le ſujet de ſon Livre. Les principes eſſentiels une fois trouvez, les veritez coulent avec une facilité délicieuſe pour l'eſprit, leur enchaînement eſt plus ſimple, & en même tems plus étroit, le ſpectacle de leur generation, qui n'a plus rien de forcé, en eſt plus agréable, & cette même generation plus légitime en quelque ſorte, eſt auſſi plus féconde. La Nouvelle Mécanique fût reçûë de tous les Géométres avec applaudiſſement; & elle valut à ſon Auteur deux places conſiderables, l'une de Géométre dans cette Académie en 1688. l'autre de Profeſſeur de Mathématiques au College Mazarin. On vouloit donner du rélief à cette Chaire, qui n'avoit point encore été remplie, & il fut choiſi.

Il mit au jour en 1690. ſes *Nouvelles Conjectures ſur la Peſanteur*. Il conçoit une Pierre poſée dans l'Air, & il demande pourquoi elle tombe vers le centre de la Terre. L'Air eſt un Liquide, dont par conſequent les differentes parties ſe meuvent en tous les ſens imaginables, & une direction quelconque étant déterminée, il n'eſt pas poſſible qu'il n'y en ait un grand nombre qui s'accordent à la ſuivre. On peut imaginer toutes celles qui s'accordent dans une même direction, comme ne faiſant qu'une même Colonne. La Pierre eſt donc frappée par des Colonnes qui la pouſſent d'Orient en Occident, d'Occident en Orient, de bas en haut, de haut en bas. Les Colonnes qui la pouſſent lateralement d'Orient en Occident, ou au contraire, ſont égales en longueur, & par conſequent en force, & il n'en réſulte à la Pierre aucune impreſſion. Mais celles qui la pouſſent de haut en bas ſont beaucoup plus longues que celles qui la pouſſent de bas en haut, & cela à quelque diſtance de la Terre où la Pierre ait jamais pû être portée; elle ſera donc pouſſée avec plus de force de haut en bas, que de bas en haut, & elle tombera, & tombera vers le centre de la Terre; ou, ce qui eſt le même, perpendiculairement

à sa surface, parce que les Colonnes laterales égales en force, l'empêchent de s'écarter, ni à droite, ni à gauche. Si la Pierre étoit à une égale distance & de la Terre, & de la derniere surface de l'Air, elle demeureroit en repos, plus loin elle monteroit. Ce qu'on a dit de l'Air, on le dira de même de la matiere subtile, & de tout autre Liquide où des Corps seront posez. Telle est en general l'idée de M. Varignon sur la cause de la Pesanteur. Plusieurs grands Hommes ont prouvé par l'inutilité de leurs efforts l'extrême difficulté de cette matiere; & j'avouë qu'il pourroit bien aussi l'avoir prouvée. Du moins ce Systême a-t'il eu peu de Sectateurs; & quoique simple, bien lié, bien suivi, il est vrai qu'un Physicien, même avant la discussion, ne se sent point porté à le croire. L'Auteur l'auroit plus aisément défendu que persuadé. Aussi ne l'a-t'il point donné avec cette confiance & cet air triomphant, qui ont accompagné tant d'autres Systêmes; le titre modeste de *Conjectures* répondoit sincerement à sa pensée. Il ne croyoit point qu'en matiere de Physique, & principalement sur les premiers principes de la Physique, on pût passer la conjecture, & il sembloit être ravi que sa chere Géométrie eût seule la certitude en partage.

Dans ses recherches mathématiques, son génie le portoit toûjours à les rendre les plus generales qu'il fût possible. Un Païsage dont on aura vû toutes les parties l'une après l'autre, n'a pourtant point été vû, il faut qu'il le soit d'un lieu assez élevé, où tous les objets auparavant dispersez, se rassemblent sous un seul coup d'œil. Il en va de même des veritez géométriques; on en peut voir un grand nombre dispersées çà & là, sans ordre entr'elles, sans liaison; mais pour les voir toutes ensemble, & d'un coup d'œil, on est obligé de rémonter bien haut, & cela demande de l'effort & de l'adresse. Les formules generales Algébriques sont les lieux élevez où l'on se place pour découvrir tout à la fois un grand

Pays. Il n'y a peut-être pas eu de Géométre, ni qui ait mieux connu, ni qui ait mieux fait sentir le prix de ces formules que M. Varignon.

Il ne pouvoit donc manquer de saisir avidement la Géométrie des Infiniment Petits, dès qu'elle parut ; elle s'éleve sans cesse au plus haut point de vûë possible, à l'Infini, & de-là elle embrasse une étenduë infinie. Avec quel transport vit-il naître une nouvelle Géométrie, & de nouveaux plaisirs ? Quand cette belle & sublime Méthode fut attaquée dans l'Académie même *, car il falloit qu'elle subît le sort de toutes les nouveautez, il en fut un des plus ardens Défenseurs, & il força en sa faveur son caractere naturel ennemi de toute contestation. Il se plaignit quelquefois à moi, que cette dispute l'avoit interrompu dans des recherches sur le Calcul Integral, dont il auroit de la peine à reprendre le fil. Il sacrifia les Infiniment Petits à eux-mêmes, le plaisir & la gloire d'y faire des progrès au devoir plus pressant de les défendre.

* V. l'Hist. de 1701. p. 89. & suiv. 2de Edit.

Tous les Volumes que l'Académie a imprimez, rendent compte de ses travaux. Ce ne sont presque jamais des morceaux détachez les uns des autres ; mais de grandes Théories completes sur les Loix du Mouvement, sur les forces Centrales, sur la Resistance des Milieux au Mouvement. Là par le moyen de ses formules generales, rien ne lui échappe de ce qui est dans l'enceinte de la matiere qu'il traite. Outre les veritez nouvelles, on en voit d'autres déja connuës d'ailleurs, mais détachées, qui viennent de toutes parts se rendre dans sa Théorie. Toutes ensemble font corps, & les vuides qu'elles laissoient auparavant entr'elles, se trouvent remplis.

La certitude de la Géométrie n'est nullement incompatible avec l'obscurité & la confusion ; & elles sont quelquefois telles, qu'il est étonnant qu'un Géométre ait pû se conduire sûrement dans le labyrinthe ténébreux où il marchoit. Les Ouvrages de M. Varignon ne causent ja-

mais cette desagréable surprise ; il s'étudie à mettre tout dans le plus grand jour ; il ne s'épargne point, comme font quelquefois de grands hommes, le travail de l'arrangement, beaucoup moins flateur, & souvent plus pénible que celui de la production même, il ne recherche point par des sous-entendus hardis la gloire de paroître profond.

Il possedoit fort l'Histoire de la Géométrie. Il l'avoit apprise non pas tant précisément pour l'apprendre, que parce qu'il avoit voulu rassembler des lumiéres de tous côtez. Cette connoissance historique est sans doute un ornement pour un Géométre ; mais de plus ce n'est pas un ornement inutile. En general plus l'esprit a été tourné & retourné en differens sens sur une même matiere, plus il en devient fécond.

Quoique la santé de M. Varignon parût devoir être à toute épreuve, l'assiduité & la contention du travail lui causerent en 1705. une grande maladie. On n'est guéres si habile impunément. Il fut six mois en danger, & trois ans dans une langueur, qui étoit un épuisement d'esprits visibles. Il m'a conté que quelquefois dans des accès de fievre, il se croyoit au milieu d'une forêt, où il voyoit toutes les feuilles des arbres couvertes de Calculs algebriques. Condamné par ses Medecins, par ses amis, & par lui-même à se priver de tout travail, il ne laissoit pas, dès qu'il étoit seul dans sa chambre, de prendre un Livre de Mathématique, qu'il cachoit bien vîte, s'il entendoit venir quelqu'un. Il reprenoit la contenance d'un malade, & n'avoit pas besoin de joüer beaucoup.

Il est à remarquer, par rapport à son caractere, que ce fut en ces tems-là qu'il parut de lui un Ecrit, où il reprenoit M. Wallis sur de certains Espaces plus qu'Infinis, que ce grand Géométre attribuoit aux Hyperboles. Il soûtenoit au contraire qu'ils n'étoient que finis. * La critique avoit tous les assaisonnemens possibles d'honnêteté ; mais enfin c'étoit une critique : & il ne l'avoit

* V. l'Hist. de 1706. p. 47.

faite que pour lui seul. Il la confia à M. Carré, étant dans un état qui le rendoit plus indifferent pour ces sortes de choses ; & celui-ci touché du seul interêt des Sciences, la fit imprimer dans nos Memoires, à l'insçû de l'Auteur, qui se trouva Aggresseur contre son inclination.

Il revint de sa maladie & de sa langueur, & ne profita nullement du passé. L'Edition de son *Projet d'une Nouvelle Mécanique* ayant été entierement débitée, il songea à en faire une seconde, ou plûtôt un Ouvrage nouveau, quoique sur le même plan ; mais beaucoup plus ample, & auquel le titre de *Projet* ne convenoit plus. On y devoit bien sentir la grande acquisition de richesses qu'il avoit faite dans l'intervalle. Mais il se plaignoit souvent que le tems lui manquoit, quoiqu'il fût bien éloigné d'en perdre volontairement. Une infinité de visites soit de François, soit d'Etrangers, dont les uns vouloient le voir pour l'avoir vû, & les autres pour le consulter & s'instruire des Ouvrages de Mathématique que l'autorité ou l'amitié de quelques personnes l'engageoient à examiner, & dont il se croyoit obligé de rendre le compte le plus exact ; un grand commerce de lettres avec les principaux Géométres de l'Europe, & des lettres sçavantes & travaillées ; car il ne falloit pas plus se negliger avec ces amis-là, qu'avec le Public même : tout cela nuisoit beaucoup au Livre qu'il avoit entrepris. C'est ainsi qu'on devient celebre, parce qu'on a été maître de disposer d'un grand loisir, & qu'on perd ce loisir si précieux, parce qu'on est devenu celebre. De plus ses meilleurs Ecoliers, soit du College Mazarin, soit du College Royal, car il y occupoit aussi une Chaire de Mathématique, étoient en possession de lui demander des leçons particulieres. La joye de voir qu'ils en demandassent, son zele pour les Mathématiques, sa bonté naturelle, son inclination à étendre un devoir plûtôt qu'à le resserrer, leur avoient donné ce droit, & ôté la crainte d'en user trop librement. Il soupiroit après deux ou trois mois de vacances qu'il avoit pendant l'année ; il

fuyoit

fuyoit à quelque campagne, où les journées entieres étoient à lui, & s'écouloient bien vîte.

Malgré son extrême amour pour la paix, il a fini sa vie par être embarqué dans une contestation. Un Religieux Italien, habile en Mathématique, l'attaqua sur la Tangente & l'Angle d'attouchement des Courbes, tels qu'on les conçoit dans la Géométrie des Infiniment Petits.* Il se crut obligé de répondre, &, à dire le vrai, les indifferens ne l'eussent pas trop crû. Je ne crois pas sortir du personnage de simple Historien, en assûrant que sa gloire ne couroit aucun péril; mais il étoit sensible de ce côté-là, ou plûtôt toute sa sensibilité y étoit rassemblée. Il répondit par le dernier Memoire qu'il ait donné à l'Academie, & qui a été le seul où il fût question d'un different. Son inclination pacifique y dominoit pourtant encore; il n'y nommoit point son Adversaire, qui l'avoit nommé à tout moment; que tout le monde connoissoit, qui ne se cachoit point; & quoiqu'on lui representât la parfaite inutilité, & même la superstition de cette reticence, il s'obstina toûjours à ne le nommer que *l'Aggresseur.* Il est vrai qu'il n'en usoit pas si honnêtement à l'égard des Paralogismes, & qu'il leur donnoit leur veritable nom.

* V. Hist. de l'Acad. ann. 1722. pag. 74. & suiv.

Dans les deux dernieres années de sa vie, il fut fort incommodé d'un rhumatisme placé dans les muscles de la poitrine; il ne pouvoit marcher quelque tems sans être obligé de se reposer pour reprendre haleine. Cette incommodité augmenta toûjours, & tous les remedes y furent inutilles; ce qui ne le surprenoit pas beaucoup. Il n'en relâcha rien de ses occupations ordinaires; & enfin après avoir fait sa classe au College Mazarin le 22 Decembre 1722. sans être plus mal que de coûtume, il mourut subitement la nuit suivante.

Son caractere étoit aussi simple que sa superiorité d'esprit pouvoit le demander. J'ai déja donné cette même loüange à tant de personnes de cette Academie, qu'on peut croire que le merite en appartient plûtôt à nos

Sciences qu'à nos Sçavans. Il ne connoissoit point la jalousie : il est vrai qu'il étoit à la tête des Géométres de France, & qu'on ne pouvoit compter les grands Géométres de l'Europe, sans le mettre du nombre : mais combien d'hommes en tout genre élevez à ce même rang, ont fait l'honneur à leurs inferieurs d'en être jaloux, & de les décrier ? La passion de conserver une premiere place fait prendre des précautions qui dégradent. Il faut convenir cependant que quand on lui presentoit quelqu'idée qui lui étoit nouvelle, il couroit quelquefois un peu trop vîte à l'objection, & à la difficulté ; le feu de son esprit, des vûës dont il étoit plein sur chaque matiere, venoient traverser trop impetueusement celles qu'on lui offroit ; mais on parvenoit assez facilement à obtenir de lui une attention plus tranquille & plus favorable. Il mettoit dans la dispute une chaleur que l'on n'eût jamais cru qu'il eût dû terminer par rire. Ses manieres d'agir nettes, franches, loyales en toute occasion, exemptes de tout soupçon d'interêt indirect & caché, auroient seules suffi pour justifier la Province dont il étoit, des reproches qu'elle a d'ordinaire à essuyer : il n'en conservoit qu'une extrême crainte de se commettre, qu'une grande circonspection à traiter avec les hommes, dont effectivement le commerce est toûjours redoutable. Je n'ai jamais vû personne qui eût plus de conscience, je veux dire, qui fût plus appliqué à satisfaire exactement au sentiment interieur de ses devoirs, & qui se contentât moins d'avoir satisfait aux apparences. Il possedoit la vertu de reconnoissance au plus haut degré ; il faisoit le récit d'un bienfait reçû avec plus de plaisir que le Bienfaicteur le plus vain n'en eût eu à le faire ; & il ne se croyoit jamais acquitté par toutes ces compensations, dont on s'établit soi-même pour juge. Il étoit Prêtre, & n'avoit pas besoin de beaucoup d'efforts pour vivre conformément à cet état. Aussi sa mort subite n'a-t'elle point allarmé ses amis.

Il m'a fait l'honneur de me léguer tous ses papiers

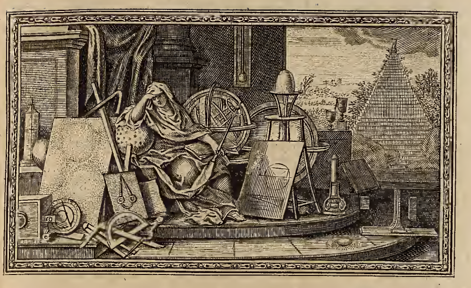
par ſon Teſtament. J'en rendrai au Public le meilleur compte qu'il me ſera poſſible. La Nouvelle Mécanique eſt en aſſez bon état, & paroîtra au jour : j'eſpere que les Lettres la ſuivront. Du reſte je promets de ne rien détourner à mon uſage particulier des Treſors que j'ai entre les mains ; & je compte que j'en ſerai crû. Il faudroit un plus habile homme pour faire ſur ce ſujet quelque mauvaiſe action avec quelque eſperance de ſuccès.



TABLE

DES SECTIONS CONTENUËS dans ce premier Volume.

NOUVELLE



NOUVELLE MECANIQUE.



A Mécanique en general eſt la Science du Mouvement, de ſa cauſe, de ſes effets; en un mot de tout ce qui y a rapport. Par conſequent elle eſt auſſi la Science des proprietez & des uſages des Machines ou Inſtrumens propres à faciliter le Mouvement. Entre ces Machines on en compte d'ordinaire ſix élementaires après Pappus (*Liv.* 8.) lequel pourtant n'en compte que cinq, quoiqu'il en employe ſix; ſçavoir, le *Levier*, le *Tour*, la *Poulie*, le *Plan incliné*, la *Vis*, & le *Coin*; auſquelles on en peut encore ajoûter une, que j'appelle *Funiculaire*, en ce qu'elle n'eſt faite que de cordes propres à ſoûtenir des poids ſans le ſecours d'aucune autre Machine, & en ce qu'elle eſt auſſi indépendante de celles-là, qu'elles le ſont entr'elles. On définira toutes ces Machines, à meſure qu'on en démontrera les proprietez.

C'eſt de cette derniere partie de Mécanique qu'il s'agit ici, c'eſt-à-dire, qu'il ne s'agit que des Machines élementaires précedentes, & de quelques autres qu'on regarde d'ordinaire comme compoſées de celles-là. Cette partie de Mécanique eſt proprement appellée *Statique*; mais la plûpart des Auteurs lui ayant laiſſé le nom general de *Mécanique*, j'ai crû la devoir auſſi appeller de ce nom, pour ne pas parler autrement qu'eux.

Ce Traité ſera de dix Sections: La premiere ſera de Définitions, d'Axiomes, de Demandes, & de Lemmes, pour le mettre à la portée des Commençans. La ſeconde ſera de Poids ſuſpendus ou ſoûtenus avec des cordes ſeulement. La troiſiéme ſera des Poulies. La quatriéme, du Tour. La cinquiéme, du Levier. La ſixiéme, du Plan incliné. La ſeptiéme, de la Vis. La huitiéme, du Coin. La neuviéme contiendra un Corrollaire general des principes établis dans les Sections précedentes; & la dixiéme enfin traitera de l'équilibre des Liqueurs.



PREMIERE SECTION.

Pour l'intelligence des Sections suivantes.

DEFINITIONS.

I. ON appelle *Machine*, tout Instrument dont on peut se servir à mouvoir un corps; & *Puissance*, tout ce qui l'y peut faire servir, ou en general tout ce qui est capable de mouvoir un corps, soit à l'aide d'une Machine, ou non. Tout ce que cette Puissance exerce de force pour cela, s'appelle sa *force absoluë*, laquelle se prend aussi pour cette Puissance, lorsque cette force est tout ce que cette même Puissance est capable d'en exercer. Ce qu'il y a de force employée à mouvoir le corps, & en vertu de qui il seroit effectivement mû, si rien ne s'y opposoit, s'appelle la *force de ce corps*. Enfin l'on appelle ici *force relative* d'une Puissance appliquée à une Machine, tout ce qu'il en résulte à cette Machine au point où cette Puissance lui est appliquée. Tout ce que l'on dit ici des Puissances & des Forces, se dira de même des Résistances de ce qui s'oppose à leur action; lesquelles font le même effet que des Puissances ou Forces qui résisteroient précisément, de même que ces obstacles font à celles-là.

II. On appelle *Pesanteur* d'un corps une force (de quelque cause qu'elle lui vienne) qui tend à le mouvoir de haut en bas en ligne droite vers le centre de la Terre; & l'on appelle *Poids* un corps d'une certaine mesure de pesanteur, tel qu'est une livre, deux livres, &c. De sorte que *Pesanteur* d'un corps, & *Poids* du même corps, ne signifieront dans la suite que la même chose.

C'est sur cette mesure que se fait d'ordinaire l'estimation

de toutes les autres Forces moins connuës, comme l'estimation des grandeurs Géométriques se fait sur le Pied, la Toise, &c. de sorte que l'on dit d'une force quelconque, qu'elle est d'une Livre, de deux, de trois, &c. comme l'on dit d'une Ligne qu'elle est d'un Pied, de deux, de trois, &c.

III. La Ligne, suivant laquelle une Puissance presse, pousse, ou tire le corps ou la machine à laquelle elle est appliquée, s'appelle la *Ligne de direction* de cette puissance ou force.

IV. On appelle *Impression (Momentum)* de cette puissance ou force sur ce corps ou sur cette Machine, ce que la maniere dont elle lui est appliquée lui permet d'action contre l'obstacle à surmonter.

V. Deux ou plusieurs forces sont dites *en Equilibre* entr'elles, lorsqu'agissant l'une contre l'autre, ou contre un obstacle commun, elle ne l'emportent ni l'une sur l'autre, ni sur cet obstacle; c'est-à-dire, lorsque tout demeure en repos, nonobstant l'action de ces forces ou puissances l'une contre l'autre, ou contre l'obstacle qui les arrête, & qu'on appelle *Appui.*

VI. Un mouvement résultant du concours d'action de deux ou de plusieurs forces, s'appelle d'ordinaire *Mouvement composé*: non qu'il le soit de plusieurs autres mouvemens; mais parce qu'il résulte de ce concours de forces comme d'une seule qui seroit composée de ce qu'elles y employent d'action.

AXIOMES.

I. Les effets sont toûjours proportionnels à leurs causes ou forces productrices, puisqu'elles n'en sont les causes qu'autant qu'ils en sont les effets, & seulement en raison de ce qu'elles y causent.

II. Donc des forces ou des résistances égales, suivant les mêmes directions, ont des effets égaux, ou les mêmes; & consequemment une force égale à une autre, ou à quelq[ue] résistance que ce soit, mise à sa place avec la même d[ir]ection, & en même sens, y doit produire le même eff[et].

III. Lorſqu'un corps eſt preſſé, pouſſé, ou tiré tout à la fois par deux forces égales, & directement oppoſées, il doit reſter immobile, c'eſt-à-dire, en repos, ſans autre obſtacle que la contrarieté de ces forces qui ſe détruiſent, ou s'empêchent également l'une l'autre, chacune ſoûtenant l'autre toute entiere.

La même choſe ſe doit dire (*ax*. 2.) d'une force & d'une réſiſtance qui lui ſeroit égale, & directement oppoſée.

IV. Si un corps ainſi pouſſé, preſſé, ou tiré par des forces à la fois, reſte immobile ou en repos, ſans autre obſtacle que la contrarieté de ces forces; ces mêmes forces ſeront égales, & directement oppoſées, c'eſt-à-dire, égales entr'elles, & ſuivant une même direction en ſens contraires.

La même choſe ſe doit dire (*ax*. 2.) d'une force & d'une réſiſtance, qui malgré cette force, retiendroit en repos le corps que cette même force tendroit à mouvoir.

V. Un corps preſſé, pouſſé, ou tiré tout à la fois par deux forces inégales & directement oppoſées, doit ſe mouvoir dans le ſens de la plus forte, comme s'il ne l'étoit que par une ſeule ainſi dirigée & égale à leur difference; ou ſi quelque obſtacle l'en empêche, cet obſtacle doit être dans la direction commune de ces deux forces, & d'une réſiſtance égale à leur difference.

VI. Les vîteſſes d'un même corps, ou de corps de maſſes égales, ſont comme les forces motrices qui y ſont employées, c'eſt-à-dire, qui y cauſent ces vîteſſes; reciproquement lorſque les vîteſſes ſont en cette raiſon, elles ſont celles d'un même corps, ou de corps de maſſes égales.

VII. Les eſpaces parcourus de vîteſſes uniformes en tems égaux par des corps quelconques, ſont entr'eux comme ces mêmes vîteſſes; & reciproquement lorſque ces eſpaces ſont en cette raiſon, ils ont été parcourus en tems égaux.

VIII. Les eſpaces parcourus en tems égaux par un

même corps, ou par des corps de masses égales, sont comme les forces qui les leur font parcourir ; & reciproquement lorsque ces espaces sont en cette raison, ils sont parcourus en tems égaux par un même corps, ou par des corps de masses égales. Cet Axiome-ci est un Corrollaire des deux précedens Ax. 6. 7.

Le mot de vîtesse *dans la suite y signifiera toûjours* vîtesse uniforme, *à moins qu'on n'y avertisse du contraire.*

DEMANDES.

I. Pour traiter géométriquement les Machines dont on parlera dans la suite, qu'il soit permis de les supposer ou imaginer d'abord comme sans pesanteur, sans résistance de frottemens, ni du milieu ou plein, dans lequel on les supposera comme dans le vuide parfaitement mobiles sur leurs axes ou sur leurs pivots, comme sur des lignes ou sur des points Mathématiques dures & roides ; excepté les cordes, lesquelles soient parfaitement flexibles dans toutes leurs parties, sans grosseur, sans ressort & sans prêter, c'est-à-dire, sans s'accourcir, ni pouvoir être allongées : sauf à y ajoûter ensuite pour force, ou à en retrancher ce qui pourroit y avoir de contraire à tout cela, dont on demande seulement qu'il soit permis de faire abstraction.

II. Qu'il soit aussi permis de faire abstraction de la pesanteur d'un corps, & de le considerer comme s'il n'en avoit aucune : sauf à la regarder (*ax.* 2.) comme une puissance qui lui seroit appliquée, quand on le considerera comme poids, on en avertira. Hors cela quand on parlera d'un corps, on le considerera toûjours comme sans pesanteur.

PRINCIPE GENERAL.

Quel que soit le nombre des forces ou des puissances quelconques, dirigées comme l'on voudra, qui agissent à la fois sur [un] même corps, ou ce corps ne se remuera point du [ét]at, ou il n'ira que par un seul chemin, &

ſuivant une ligne qui ſera la même que ſi au lieu d'être ainſi pouſſé, preſſé, ou tiré par toutes ces puiſſances à la fois, ce corps ne l'étoit ſuivant la même ligne, & en même ſens que par une ſeule force ou puiſſance équivalente ou égale à la réſultante du concours de toutes celles-là.

Ce principe eſt d'autant plus évident, que rien ne l'eſt davantage qu'un même corps ne ſçauroit aller par pluſieurs chemins à la fois; & de quelque vîteſſe qu'il y aille, il n'ira que comme s'il n'étoit pouſſé en ce ſens que par une ſeule force capable de lui donner cette vîteſſe.

COROLLAIRE I.

Or ſi ce corps n'étoit preſſé, pouſſé ou tiré que par une ſeule force, un obſtacle invincible, ou du moins d'une réſiſtance égale à cette force, oppoſé à ce corps dans la direction de cette même force, l'arrêteroit (*ax.* 3.) tout court; puiſque (*hyp.*) cette force n'auroit d'action, ni conſequemment ce corps d'impreſſion que ſuivant ce chemin qui lui ſeroit alors fermé par cet obſtacle. Donc auſſi un obſtacle invincible, ou du moins d'une réſiſtance égale à la force réſultante du concours d'action de tant d'autres quelconques qu'on voudra, & dirigées comme l'on voudra, oppoſé dans la direction de cette force réſultante au corps, ſur lequel agiſſent toutes celles-là, l'arrêtera tout court, & ſoûtiendra ainſi ſur lui toutes ces forces ou puiſſances en équilibre entr'elles.

COROLLAIRE II.

Reciproquement, puiſqu'un corps ainſi preſſé, pouſſé, ou tiré par tant de puiſſances à la fois qu'on voudra, quelles qu'elles ſoient, & dirigées comme l'on voudra, ne le ſeroit que comme par une ſeule force égale à la réſultante du concours d'action de toutes ces puiſſances ſur ce corps, & dirigée en même ſens que cette réſultante: ſi ce corps ſe trouve arrêté par un obſtacle qui empêche toutes ces puiſſances de ſe mouvoir, & les met-

te ainsi toutes en équilibre entr'elles, cet obstacle se trouvera toûjours (*ax.* 4.) dans cette direction de la force résultante de leur concours d'action, qu'il soûtiendra d'une résistance égale, &c. directement contraire à cette force.

COROLLAIRE III.

Donc l'équilibre sera impossible entre quelque nombre de puissance que ce soit, tant qu'elles ne trouveront point d'obstacle de résistance égale & directement opposée à la force résultante de leur concours; puisque (*corol.* 2.) s'il y avoit équilibre entr'elles, il s'y trouveroit toûjours un tel obstacle, soit étranger, soit de la part d'une ou de plusieurs de ces puissances contre les autres.

Ces Corollaires du principe general font voir, sur tout le Corol. I. que pour mettre en équilibre entr'elles tant de forces ou puissances quelconques qu'on voudra, qui dirigées à volonté, agissent toutes à la fois sur un même corps, il n'y a plus qu'à trouver, suivant quelle ligne elles doivent s'accorder à le pousser, ou à le tirer toutes ensemble, si on veut lui opposer dans cette ligne un obstacle absolument invincible; & avec quelle force, si dans cette ligne on ne veut lui en opposer qu'un d'une résistance égale à cette force résultante du concours d'action de tout ce qu'il y en a qui agissent à la fois sur lui.

C'est ce que nous allons trouver par le moyen des mouvemens composez connus des Anciens & des Modernes: Aristote en a fait un Traité dans ses Questions Mécaniques; Archimede, Nicomede, Dinostrate, Diocles, &c. les ont employez pour la description de la Spirale, de la Conchoïde, de la Cyssoïde, de la Quadratrice, &c. Descartes s'en est servi pour expliquer la reflexion & la refraction de la lumiere. En un mot, tous les Mathematiciens se servent des mouvemens composez pour la generation d'une infinité de lignes courbes; & tous les Physiciens exacts, pour déterminer les forces des chocs ou des percussions obliques, &c. Ainsi je n'y prétends rien que l'usage que j'en indiquai il y a près de 40 ans, & que j'en fais encore ici sur l'explication des Machines.

Ces

Ces mouvemens se trouvent démontrez par plusieurs Auteurs : cependant pour ne pas renvoyer le Lecteur à leurs Livres, & pour qu'il n'ait besoin que de celui-ci pour entendre les usages que je vais faire de ces mouvemens ; je vais encore les démontrer ici, & peut-être d'une maniere qui sera celle de quelqu'un de ces Auteurs : mais qu'importe de qui en soient les démonstrations, pourvû qu'elles soient bonnes, puisque je n'y prétends que l'usage que j'en fais ?

DEFINITION VII.

La ligne suivant laquelle plusieurs forces ou puissances s'accordent à pousser ensemble un même corps, s'appellera leur *direction commune* ; & celle suivant laquelle chacune de ces puissances tend à mouvoir ce corps, ou suivant laquelle elle le meuvroit en effet, s'appellera la *direction particuliere* de cette force ou puissance.

COROLLAIRE.

Le corps sur lequel ces puissances agissent ainsi à la fois, n'ayant d'impression (*dem. 2.*) que ce qu'il en reçoit de leur concours d'action, leur direction commune sera aussi celle de ce corps.

DEFINITION VIII.

Le point de cette direction, dans lequel se réunit l'action de toutes ces puissances sur ce corps, s'appellera son *centre de direction*, & le leur. Tout autre point de cette direction, sur lequel ce corps appuyé demeureroit en repos (*corol. 1. du princ. gener.*) nonobstant l'action de toutes ces puissances sur lui, s'appellera son *centre d'équilibre*, & le leur aussi.

AVERTISSEMENT I.

Quand on dira dans la suite qu'un corps est pressé, poussé, ou tiré de telle ou telle *force*, ou par telle ou telle *force*, qu'on appellera aussi *puissance*, on n'entendra par cette force que ce que l'Agent qui presse, pousse, ou

tire ce corps, lui en imprime ſuivant ſa direction, & non tout ce que cet Agent en pourroit avoir en le pouſſant ou en le tirant : par exemple, lorſque la boule A choque ou pouſſe la boule B, nous ne prendrons pour la force de la boule B, que ce que la boule A lui en imprimera ſuivant ſa direction, & non tout ce que cette boule A en avoit en la choquant : le ſurplus de ce que la boule A en avoit, n'appartenant point à la boule B, mais ſeulement ce que cette boule B en reçoit ſuivant la direction de la boule A. Ainſi par les mots de *force*, ou *puiſſance motrice* d'un corps, on n'entendra dans la ſuite que ce qu'il en reçoit de l'Agent qui le pouſſe ou le tire, & non tout ce que cet Agent en pourroit avoir en le pouſſant ; ou (ce qui revient au même) on ne comptera ici pour *force* ou *puiſſance motrice* dans l'Agent, que ce qu'il en communique au corps ſur lequel il agit : c'eſt cette meſure de force communiquée, qui ſera dans la ſuite appellée la *force motrice* de ce corps. Ce qui ſoit dit pour éviter toute équivoque, que j'ai crû avoir évitée en 1687. dans le *Projet* de cette Mécanique-ci, en n'y employant pour Agent que des puiſſances indiquées par des mains, & non des corps pour mouvoir des corps, ou des poids pour mouvoir des poids. C'eſt pour cela que l'on n'employera ici encore que des mains pour indiquer les puiſſances, ou les forces dont un corps ſera pouſſé ou tiré, ou dont un poids ſera ſoûtenu en équilibre : ce qui me paroît d'autant plus commode en ce cas-ci, que l'imagination ſe repreſente bien plus aiſément des puiſſances ou des mains dirigées en tout ſens, que des poids qui ne le peuvent être qu'en s'appuyant ſur des poulies, dont il faudroit avoir connu les proprietez avant que de les employer ; outre que des poulies, aux queſtions où il ne s'agit pas d'elles, rendroient les figures plus compoſées, & gêneroient toûjours l'imagination.

AVERTISSEMENT II.

On ne ſuppoſe ici de Géométrie dans le Lecteur, que la valeur des ſix premiers Livres & de l'onziéme des Elemens d'Euclide ; mais auſſi on l'en ſuppoſe aſſez inſtruit pour n'avoir pas beſoin de nous aſſujettir à les citer dans l'uſage que nous en allons faire. S'il arrive qu'on ſuppoſe ici quelque choſe de plus, on en inſtruira le jeune Lecteur : par exemple, comme l'on ne trouve pas d'ordinaire dans les Elemens d'Euclide certains ſignes uſitez en Algebre, deſquels nous nous ſervirons quelquefois dans la ſuite, pour abreger nos démonſtrations, & pour moins partager l'eſprit de ce Lecteur. Voici l'explication de ce que nous en employerons.

EXPLICATION

De quelques marques ou ſignes dont on ſervira dans la ſuite pour y abreger les démonſtrations, & les rendre plus claires.

I. Cette marque + ſignifie *plus*, ou *addition* : ainſi $7+5$ ſignifie 7 plus 5, ou 5 ajoûté à 7.

II. Celle-ci − ſignifie *moins*, ou *ſouſtraction* : ainſi $12-4$ ſignifie 12 moins 4, ou 4 retranchez de 12.

III. Celle-ci × ſignifie *multiplication* : ainſi 3×5 ſignifie 3 multipliez par 5.

La multiplication entr'elles de deux ou de pluſieurs grandeurs, appellée (ſi l'on veut) a, b, c, &c. s'exprimera auſſi par la juxta-poſition arbitraire de ces lettres comme en un ſeul mot, ainſi que dans l'Algebre, dont nous ne ſuppoſerons que cela, pour ne rien dire ici qui ne ſoit à la portée des moindres Géométres. Ainſi dans la ſuite par ab, ou ba, on entendra a multiplié par b, ou b par a, de même que par $a\times b$ ou $b\times a$ pareillement, par abc, acb, bac, &c. on entendra également la multiplication entr'elles des trois grandeurs appellées a, b, c, de même que par $a\times b\times c$, $a\times c\times b$, $b\times a\times c$, &c.

IV. Celle-ci $=$ ſignifie *égalité* : ainſi $7+5=12$ ſignifie que $7+5$ eſt égal à 12 ; de même $12-4=8$ ſignifie que $12-4$ eſt égal à 8 ; pareillement $7+5=16-4$ ſignifie que $7+5$ eſt égal à $16-4$, chacune de ces deux quantitez étant égale à 12.

V. Celle-ci $>$ ou $<$ ſignifie *majorité* du côté de ſon ouverture, & *minorité* du côté de ſa pointe : ainſi $12>8$ ſignifie que 12 eſt plus grand que 8 ; & $8<12$ ſignifie au contraire que 8 eſt plus petit que 12.

VI. Ces quatre points :: placez après le ſecond des quatre termes d'une analogie ou proportion, dont les trois autres ſont ſuivis chacun d'un point, ſont la marque de cette proportion : ainſi $2.4::3.6.$ ſignifie que 2 ſont à 4, comme 3 ſont à 6. Et pour exprimer une proportion continue, c'eſt-à-dire, une ſuite de raiſons ou de rapports ſemblables, on repete les quatre points de deux en deux termes, en mettant un point après chacun des autres ; par exemple, $2.4::3.6::5.10::7.14::$ &c. ſignifie que 2 ſont à 4, comme 3 à 6, comme 5 à 10, comme 7 à 14, &c.

VII. Si à la place des quatre points :: précedens, placez entre le ſecond & le troiſiéme des quatre termes où ils ſignifioient *égalité de raiſon*, on met quelqu'un des deux ſignes $>$, $<$, il y ſignifiera *inégalité de raiſon* : ſçavoir, le premier $>$, *majorité de raiſon*, & le ſecond $<$, *minorité de raiſon*. Ainſi $5.2>6.3.$ ſignifie que 5 ſont à 2 en plus grande raiſon que 6 à 3. Au contraire, $2.5<3.6.$ ſignifie que 2 ſont à 5 en moindre raiſon que 3 à 6.

VIII. La lettre ſ longue ſera priſe dans la ſuite pour une marque ou caracteriſtique qui aura deux ſignifications differentes, ſelon qu'elle précedera des angles, ou d'autres grandeurs.

1° Elle ſignifiera *ſinus* d'un angle, lorſqu'elle le précedera : par exemple, ſABC ſignifiera le *ſinus* d'un angle appellé ABC.

2°. Cette même lettre ſ longue ſignifiera auſſi la *ſomme*

de plusieurs autres grandeurs, lorsqu'elle les précedera: par exemple, $\int \overline{3+5+7} = 15$ signifiera que la *somme* de $3+5+7$ vaut 15; de même $\int \overline{6+7-5} = 8$ signifiera que $6+7-5$ valent 8.

On aura soin dans la suite d'avertir dans lequel de ces deux sens cette longue *ſ* sera prise: mais en cas qu'on oubliât de le faire, ce double sens est (je croi) ici assez marqué pour ne s'y pas méprendre. On ne donne ici cette double signification à cette longue *ſ*, que parce qu'étant la premiere lettre des mots de *sinus* & de *somme*, elle sera très-propre à les rendre presens à l'imagination ou à l'esprit; outre que cette longue *ſ* italique n'entre d'ordinaire, & n'entrera dans la suite ni dans le calcul, ni dans les figures pour aucune autre signification.

LEMME I.

Pour préparer l'imagination aux mouvemens composez, concevons le point A sans pesanteur uniformement mû vers B le long de la droite AB, pendant que cette ligne se meut aussi uniformement vers CD le long de AC, en demeurant toûjours parallele à elle-même, c'est-à-dire, faisant l'angle toûjours le même quelconque avec cette ligne immobile AC: de ces deux mouvemens commencez en même tems, soit la vîtesse du premier à la vîtesse du second, comme les côtez AB, AC, du parallelogramme ABCD, le long desquels ils se font. Quel que soit ce parallelogramme ABCD, je dis que par le concours des deux forces productrices de ces deux mouvemens dans le mobile A, ce point parcourra la diagonale AD de ce parallelogramme, pendant le tems que chacune d'elles lui en auroit fait parcourir seule chacun des côtez AB, AC, correspondans. PLANC. I. FIG. I.

DEMONSTRATION.

Puisque (*hyp.*) la vîtesse du point mobile A vers B le long de la droite mobile AB, est à la vîtesse qu'il a avec elle vers CD :: AB. AC :: CD. AC (par un point quel-

conque G de AD soit une parallele KH à CD, laquelle rencontre AC, BD, en K, H,) : : KG. AK. L'ax. 7 fait voir qu'à l'instant que la ligne AB aura parcouru AK, & sera arrivée en KH, le point mobile A aura parcouru sur elle sa partie KG, & sera ainsi pour lors en G sur la diagonale AD du parallelogramme BC : lequel point G ayant été pris indéterminement sur cette diagonale AD, fait voir qu'en quelque point que la ligne mobile AB coupe cette diagonale, le point mobile A y sera toûjours ; & consequemment qu'il sera sur elle en D avec le point B de cette mobile AB, lorsqu'elle sera en CD. Donc par le concours des deux forces productrices des deux mouvemens supposez à ce point mobile A le long de AB & de AC, il parcourra la diagonale AD du parallelogramme ABCD pendant le temps que chacune d'elles lui en auroit fait parcourir seule chacun des côtez AB, AC, correspondans. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

Un point mû le long d'une ligne qui se meut aussi elle-même, est une chose souvent supposée par les Géometres pour la generation de plusieurs lignes courbes differentes selon la variabilité des mouvemens supposez à la fois dans le point qui les trace, comme le point mobile A en vient de tracer une droite par le concours de deux mouvemens uniformes. Ce point mobile se conçoit sans peine, en imaginant un corps ainsi mû, & diminué pendant cela par l'imagination, jusqu'à être réduit en un tel point.

LEMME II.

Si le point A sans pesanteur est poussé en même tems & uniformement par deux forces ou puissances E, F, toutes employées sur lui, suivant des lignes AC, AB, qui fassent entr'elles quelqu'angle CAB que ce soit, & que la force ou puissance E suivant AC, soit à la force ou puissance F suivant AB, comme AC est à AB. Ce point A par le concours

de ces deux forces E, F, sans le secours d'aucune ligne mobile, parcourra la diagonale AD du parallelogramme ABCD dans le même tems qu'elles lui en auroient fait parcourir separement les côtez AC, AB, qu'on leur suppose proportionnels.

DEMONSTRATION.

Deux corps mûs ensemble sans s'aider ni se nuire, comme lorsqu'ils le sont d'égales vîtesses en même sens, chacun par une force particuliere, l'étant chacun comme s'il se mouvoit seul de la force ou vîtesse qui lui est propre ; il est manifeste que le point A poussé suivant AC vers C par la puissance E, l'est de même que si la ligne AB l'étoit en même tems par quelqu'autre cause qui la mût parallelement à elle-même suivant AC vers CD, d'une vîtesse égale à celle que la puissance E donneroit seule de A vers C à ce point A ; & qu'alors ce point sans être emporté par cette ligne mobile AB, seroit toûjours sur elle ainsi mûe, comme si elle l'emportoit effectivement avec elle, pendant que la force ou puissance F le meuvroit le long de cette même ligne AB, ainsi que dans le Lem. 1. Donc ce point mobile A poussé tout à la fois par les deux puissances E, F, suivant AC, AB, doit se mouvoir de même que si dans le tems que la force F le meut de A vers B le long de la ligne AB, il étoit emporté par cette ligne mûe parallelement à elle-même le long de AC vers CD, d'une vîtesse égale à celle que la puissance E donneroit seule à ce point A vers C ; c'est-à-dire, (*ax. 6.*) d'une vîtesse qui fût à celle que ce point auroit le long de cette ligne AB :: E.F (*hyp.*) :: AC.AB. Or le Lem. 1. fait voir que le point A ainsi mû de A vers B le long de la ligne AB, pendant qu'elle l'emporteroit ainsi vers CD, parcourroit la diagonale AD du parallelogramme BC pendant le même tems que chacune des forces E, F, productrices de ce qu'il a de mouvement en ces deux sens, lui en feroit seule parcourir chacun des côtez AC, AB, correspondans.

Donc sans le mouvement de la ligne AB, supposé seulement pour aider l'imagination, le point mobile A sans pesanteur, poussé tout à la fois suivant les lignes AC, AB, par les deux puissances E, F, supposées en raison de ces deux lignes, & employées (*hyp.*) toutes entieres à le mouvoir en ces deux sens, parcourra la diagonale AD du parallelogramme ABCD dans le même tems que chacune de ces deux puissances E, F, lui en feroit seule parcourir chacun des côtez AC, AB, correspondans. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Pour démontrer cela on se contente d'ordinaire du Lem. 1. *qui y est effectivement suffisant: aussi n'ai-je employé que lui dans le Projet que je donnai en* 1687. *de cette Mécanique-ci; mais ayant reconnu depuis que quelques Physiciens y trouvoient de la difficulté, dans la pensée où ils étoient que la ligne mobile AB servoit à transporter le point mobile A vers CD, pendant qu'il se mouvoit de A vers B: c'est pour démontrer qu'elle y est inutile, & qu'elle ne sert qu'à soûtenir ici l'imagination, que j'ajoûte ce second Lemme-ci au premier, que je ne repete que pour rendre la démonstration de celui-ci plus courte & plus aisée. En voici les Corollaires.*

COROLLAIRE I.

Puisque la force résultante du concours des puissances E, F, fait parcourir la diagonale AD du parallelogramme ABCD, au point mobile A, dans le même tems que chacune de ces forces lui en auroit seule fait parcourir le côté AB, ou AC, suivant lequel elle est dirigée; non seulement ces trois forces doivent avoir leurs trois directions dans un même plan; mais encore la résultante suivant AD du concours d'action des deux autres E, F, dès le premier instant du mouvement qu'en reçoit le point A, doit dès cet instant être à chacune de celles-là (*ax.* 8.) comme cette diagonale AD du parallelogramme BC est à chacun de ses côtez AC, AB, correspondans.

COROLLAIRE II.

C'eſt donc la même choſe (*ax.* 2.) que le point A ſoit pouſſé le long de AD par le concours d'action des puiſſances E, F, ou qu'il y ſoit pouſſé par une ſeule puiſſance ainſi dirigée, laquelle ſoit à celles-là comme AD eſt à AC, AB; puiſque cette nouvelle puiſſance étant (*Corol.* 1.) égale à la réſultante du concours d'action de celles-là, & (*hyp.*) dirigée ſuivant la même AD qu'elle, feroit ſuivre cette ligne à ce point mobile A (*ax.* 2.) de la même vîteſſe que la force réſultante du concours d'action des ſuppoſées E, F, c'eſt-à-dire, de la même vîteſſe que ces deux-ci la lui font ſuivre enſemble. Ainſi un point quelconque mû d'une vîteſſe uniforme auſſi quelconque, & en ligne droite AD, peut également l'avoir été par une ſeule puiſſance dirigée en ce ſens, ou par le concours de deux autres E, F, dirigées ſuivant les côtez AC, AB, d'un parallelogramme quelconque BC, dont cette ligne AD, ſoit la diagonale, & qui ſoient à cette puiſſance-là comme ces côtez correſpondans ſont à cette diagonale.

COROLLAIRE III.

Il ſuit auſſi de ce Lemme-ci, que ſi la force ou l'impreſſion réſultante du concours d'action des deux puiſſances E, F, dirigées ſuivant AP, AQ, ſe trouve dirigée ſuivant AO, tout parallelogramme BC, dont la diagonale AD ſera ſur cette droite AO, & les côtez AC, AB, ſur AQ, AP, aura ces mêmes côtez AC, AB, entr'eux en raiſon des deux puiſſances E, F, dont ils ſont (*hyp.*) les directions: autrement l'impreſſion réſultante du concours d'action de ces deux puiſſances, ne ſe feroit pas ſuivant la diagonale AD du parallelogramme BC, ainſi qu'on le ſuppoſe; mais (*Lem.* 2.) ſuivant celle d'un autre parallelogramme, dont les côtez auſſi pris ſur les directions AQ, AP, de ces deux puiſſances E, F, feroient entr'eux comme ces mêmes puiſſances.

C

COROLLAIRE IV.

Donc aussi lorsque l'impression résultante du concours d'action des puissances E, F, dirigées suivant AQ, AP, se fait suivant AO; tout parallelogramme BC, dont la diagonale AD sera sur cette droite AO, & ses côtez AC, AB, sur AQ, AP, aura cette diagonale AD à chacun de ces côtez AC, AB, comme cette impression résultante du concours d'action des puissances E, F, sera à chacune d'elles: puisque ces deux puissances E, F, étant alors entr'elles (*Corol.* 3.) comme ces côtez AC, AB, correspondans, seroient aussi pour lors à l'impression résultante de leur concours d'action, comme ces mêmes côtez AC, AB du parallelogramme BC, seroient à sa diagonale AD.

COROLLAIRE V.

Le même raisonnement qui dans la démonstrat. du présent Lem. 2. vient de prouver que le point mobile A doit parcourir la diagonale AD par le concours d'action des deux forces E, F, supposées entr'elles comme les côtez AC, AB, du parallelogramme BC, suivant lesquels on les suppose aussi dirigées: ce même raisonnement, dis-je, prouvera que le même point A poussé à la fois par deux autres puissances dirigées suivant les côtez AM, AN, d'un autre parallelogramme quelconque MN qui auroit la même diagonale AD que celui-là, & entr'elles en raison de ces deux côtez AM, AN; parcourroit encore par leur concours d'action cette diagonale AD du parallelogramme MN dans le même tems que separément elles lui en feroient parcourir les côtez, chacune celui suivant lequel elle seroit dirigée. De sorte que si ces deux nouvelles forces suivant AM, AN, étoient aux deux premieres E, F, comme AM, AN, sont à AC, AB, étant alors separément capables (*ax.* 8.) de faire parcourir au point A les côtez correspondans AM, AN, du parallelogramme MN, dans le même tems que les forces

E, F, ſeparément auſſi lui feroient parcourir les correſpondans AC, AB du parallelogramme BC ; elles feroient auſſi enſemble parcourir à ce point A la diagonale commune AD dans le même tems que les deux forces E, F, la lui feroient parcourir enſemble. Par conſequent (*ax.* 8.) la force réſultante du concours d'action de ces deux-là, feroit alors égale à la réſultante du concours d'action de ces deux-ci. Il en ſera de même de toutes autres forces qui agiroient deux à deux ſur le même point A, ſuivant les côtez de tout autre parallelogramme qui auroit la même diagonale AD, & qui feroient non ſeulement entr'elles comme les côtez de ce parallelogramme, ſuivant leſquels elles feroient dirigées ; mais encore aux autres puiſſances priſes de même deux à deux, comme ces côtez correſpondans de ce parallelogramme aux correſpondans des leurs. D'où l'on voit (*Corol.* 2.) qu'il n'y a point de mouvement uniforme en ligne droite, qui ne puiſſe également être l'effet d'une ſeule puiſſance, ou du concours d'action d'une infinité d'autres priſes deux à deux de cette maniere-là.

Ce qu'on dit ici des mouvemens uniformes en lignes droites, ſe pourroit appliquer à toutes ſortes d'autres mouvemens ; mais cela nous écarteroit de notre ſujet.

COROLLAIRE VI.

Si le point mobile A, au lieu d'être pouſſé (comme ci-deſſus) par deux forces ou puiſſances ſeulement, l'étoit tout à la fois par tant de puiſſances quelconques qu'on voudra, dirigées ſuivant les lignes AC, AB, AM, AN, &c. menées à volonté dans un ou pluſieurs plans, leſquelles puiſſances fuſſent entr'elles comme ces lignes, & conſequemment (*Ax.* 8.) capables ſeparément de les faire parcourir chacune la ſienne à ce point A en tems égaux. Si ſous deux AC, AB, de ces deux lignes, choiſies à volonté, on fait le parallelogramme BC avec ſa diagonale AD ; enſuite ſous AD, & ſous celle AM qu'on voudra des autres proportionnelles aux puiſſances ſup- FIG. 4.

posées, le parallelogramme DM avec sa diagonale AL ; de même sous AL, & sous celle AN qu'on voudra de ces proportionelles restantes, le parallelogramme LN avec sa diagonale AP, &c. on verra suivant ce qui précede, que toutes ces forces ou puissances conspireroient ensemble à faire parcourir au point A la derniere diagonale, qui est ici AP, dans le même tems que séparément elles lui feroient parcourir chacune celui des côtez de ces parallelogrammes, suivant lequel elle seroit dirigée.

Car suivant le present Lem. 2. ce point mobile A parcourroit la diagonale AD du parallelogramme BC en vertu de la force résultante du concours des dirigées suivant AC, AB, dans le même tems que chacune de celles-ci lui en feroit parcourir separément le côté AC ou AB suivant lequel elle est dirigée. De même ce point A parcourroit la diagonale AL du parallelogramme DM dans ce même tems par le concours de cette résultante suivant AD, & de la dirigée suivant AM ; & consequemment en vertu de la résultante du concours des trois dirigées suivant AC, AB, AM. Pareillement ce même point A parcourroit encore AP pendant ce même tems, par le concours de cette derniere résultante suivant AL, & de la dirigée suivant AN ; & consequemment aussi en vertu de la résultante du concours des quatre dirigées suivant AC, AB, AM, AN ; & ainsi toûjours quelque soient le nombre, les directions & les quantitez ou les rapports des puissances qui agissent à la fois sur ce point mobile A. D'où l'on voit que par le concours d'action de toutes, ce point A suivra toûjours la diagonale du dernier des parallelogrammes faits comme ci-dessus, & la parcourra dans le même tems que chacune de ces puissances separément lui auroit fait parcourir celui des côtez de ces parallelogrammes suivant lequel elle est dirigée.

COROLLAIRE VII.

Suivant le Corol. 1. la force du point A suivant AD

résultante du concours des dirigées suivant AC, AB, étant à celles-ci comme AD est à AC, AB ; ce que ce point en a suivant AL par le concours de cette résultante suivant AD, & de la dirigée suivant AM, étant de même à celles-ci comme AL est à AD, AM ; ce qu'il en a suivant AP par le concours de la précedente suivant AL, & de la dirigée suivant AN, étant pareillement à celles-ci comme AP est à AL, AN, &c. Il s'ensuit que cette derniere force du point A suivant AP, résultante du concours d'action de toutes ses supposées dirigées suivant les côtez AC, AB, AM, AN, des parallelogrammes précedens, & entr'elles en raison de ces côtez, sera toûjours à chacune de celles-ci comme cette derniere diagonale AP sera à chacun de ces côtez correspondans ; & ainsi de même des résultantes du concours de tant d'autres puissances quelconques qu'on voudra supposer agir en même tems sur le point mobile A, quelqu'en soient aussi les directions.

SCHOLIE.

I. On vient de voir dans la démonstration du present Lem. 2. que le point mobile A poussé à la fois suivant AC, AB, par deux forces ou puissances E, F, en raison de ces deux côtez AC, AB du parallelogramme ABCD de la Fig. 1. doit se mouvoir suivant la diagonale AD de ce parallelogramme, de même que si mû de A vers B par la force F le long de AB, qui fût une ligne mobile, il étoit emporté en même tems par elle mûe parallelement à elle-même le long de AC vers CD d'une vîtesse qui fût à celle de ce point A le long de cette ligne mobile AB, comme AC est à AB, ainsi que dans le Lemme 1. Cela étant, ces deux Lemmes reçûs de tous les Géométres, deviendront sensibles aux Physiciens qui sçavent quelque chose des proportions, si au lieu du point mobile A ils imaginent une Fourmi qui se meuve uniformement de A vers B le long de la Régle AB, pendant que cette Régle coule de là uniformement, & pa- FIG. 1.


UNIVERSITARIA SEVILLA BIBLIOTECA

rallelement à elle-même le long de AC vers CD, d'une vîtesse qui soit à la vîtesse de la Fourmi sur cette Régle, comme AC est à AB; car tout le reste demeurant le même que dans la Fig. 1. dont il s'agit ici, ces Physiciens verront alors de cette Fourmi, comme on l'a démontré du point mobile A dans le Lem. 1. que lorsque la Régle AB sera arrivée en KH, la Fourmi aura parcouru KG sur elle, & consequemment sera pour lors en G sur la diagonale AD. Ils verront de même qu'en quelqu'autre endroit de AC que la Régle AB se trouve, la Fourmi sera toûjours sur la diagonale AD, dans le point où cette diagonale sera coupée par cette Régle; & enfin en D, lorsque cette Régle AB sera en CD. On voit en cela deux mouvemens distincts de la Fourmi vers BD, CD, réunis en un suivant AD, & reciproquement.

Fig. 2. II. Imaginons de plus dans la Fig. 2. du Corol. 6. que pendant que la Fourmi parcourt ainsi la diagonale AD du parallelogramme ACDB par le concours de ses mouvemens vers les côtez BD, CD de ce parallelogramme: imaginons, dis-je, que cette diagonale AD est alors emportée parallelement à elle-même le long de AM d'un mouvement uniforme qui la porte en M pendant le même tems que la Fourmi employe à parcourir cette même AD; on verra encore, comme ci-dessus, que cette Fourmi parcourra la diagonale AL du parallelogramme ADLM dans ce même tems par le concours de ses deux mouvemens suivant AD, AM: ainsi son mouvement suivant AD venant de résulter (*art.* 1.) du concours de ses mouvemens suivant AB, AC; on voit que son mouvement suivant AL doit ici résulter du concours des trois suivans AB, AC, AM.

De même si pendant que cette Fourmi parcourt ainsi AL par le concours de ces trois mouvemens uniformes, cette ligne ou régle AL est transportée parallelement à elle-même suivant AN d'un mouvement aussi uniforme qui lui fasse parcourir AN pendant le tems qu'elle est elle-même parcouruë par la Fourmi; cette même Four-

mi parcourra aussi pendant ce même tems la diagonale AP du parallelogramme ALPN par le concours de son mouvement suivant AL, & de celui de cette Régle AL suivant AN; & consequemment le mouvement de cette Fourmi suivant AL venant de résulter des trois suivant AB, AC, AM, celui qu'elle aura ici suivant AP, lui résultera des quatre uniformes suivant AB, AC, AM, AN, qu'on lui voit effectivement avoir par rapport à leurs paralleles en parcourant ainsi AP: il en sera toûjours de même jusqu'à la derniere diagonale de tout ce qu'il pourroit y avoir ici d'autres parallelogrammes construits comme dans le Corol. 6. De sorte qu'en parcourant ainsi cette derniere diagonale, cette Fourmi aura à la fois toutes les déterminations exprimées par les directions de tout ce que ces parallelogrammes auront de côtez par le point A, & avec des forces ainsi dirigées, qui seront entr'elles comme ces côtez.

III. Voilà donc dans la nature tout le contenu du present Lem. 2. & de ses Corollaires, fondement de toute la doctrine des mouvemens composez employez (comme j'ai déja dit) par Archimede dans la description de la spirale, & par plusieurs autres Géometres du premier ordre, tant anciens que modernes, pour la description d'une infinité d'autres lignes courbes: voilà à la portée de tout le monde une multiplicité de déterminations à la fois dans un même corps, d'autant plus grande, qu'il y aura ici plus de parallelogrammes faits, ou imaginez faits de Régles mobiles comme ci-dessus. Cette multiplicité de déterminations à la fois dans un même corps, s'offre même tous les jours aux yeux de tout le monde: on la voit dans chaque clou, & même dans chaque point de la circonference des rouës de carosses, de chariots & de charettes, qui avancent en roulant: on la voit dans un homme qui dans un vaisseau y marche en tout autre sens que celui du vaisseau: on la voit dans toutes les parties de notre corps, lesquelles outre le mouvement commun du marcher, ont encore leurs mouvemens par-

ticuliers : on la voit generalement dans tout corps mû sur un autre, qui se meut aussi lui-même sur un autre, lequel se meut encore sur un autre, celui-ci encore sur un autre, & ainsi de tant de corps qu'on voudra, qui transportez les uns par les autres, se meuvent en sens differens, dont celui qui est porté par tous les autres, & qui n'en porte aucun, a toutes les déterminations à la fois. Cette multiplicité de déterminations dans un même corps est enfin si fréquente dans la nature, où une infinité de mouvemens résultent du concours de plusieurs chocs, qu'il y a lieu de croire qu'il ne s'y fait presque rien que par des compositions de mouvemens ; & qu'ainsi le present Lem. 2. n'est pas seulement vrai, mais aussi très-propre à expliquer la plûpart des mouvemens de la nature, & à déterminer ce qui les doit empêcher, & y causer l'équilibre dont il s'agira dans la suite.

IV. Il faut pourtant avouer que ceux qui croyant sur la parole de M. Descartes, qu'il se conserve toûjours une égale quantité de mouvement dans le monde, pensent qu'il ne s'y en détruit point du tout, ne s'accommodent pas de ce Lemme 2. lequel prouvant (*Corol.* 1.) que la force résultante du concours d'action de deux autres quelconques dirigées suivant les côtez de quelqu'angle que ce soit, est toûjours moindre que la somme de ces deux forces generatrices, & d'autant moindre que cet angle est plus obtus, prouve aussi (*Ax.* 1.) qu'il doit toûjours alors y avoir une perte de mouvement d'autant plus grande : ils sont autant effrayez de cette perte d'un simple mode, que s'il s'agissoit d'une substance anéantie. Mais qu'ils s'en prennent à la Nature & à la raison, qui démontre ce Lem. 2. Ou si l'autorité de M. Descartes fait plus d'impression sur eux, qu'ils considerent que ce grand Géometre encore plus que Philosophe, a tellement admis ce Lemme, que c'est sur lui qu'il a établi tout ce qu'il a dit de la Reflexion & de la Refraction de la lumiere dans sa Dioptrique, sans compter

compter l'emploi qu'il en a fait dans plusieurs endroits de ses Lettres, & ailleurs.

V. Ce qui doit pourtant consoler ces Cartesiens, c'est que s'il se perd du mouvement dans les composez, il en renaît aussi de nouveau dans leur décomposition, en vertu des differentes déterminations qu'on y a vûes dans les art. 1. 2. 3. Car puisque le corps dur A, par exemple, poussé en même tems par deux autres durs E, F, suivant les côtez AB, AC, du parallelogramme BC, avec des forces capables separément chacune de lui faire parcourir chacun de ces côtez en tems égaux, en parcourroit (*Démonstr. du Lem.* 2.) par leur concours, & en pareil tems la diagonale AD, de même que si au lieu d'être ainsi poussé, il parcouroit de A vers B, la Régle AB de la vîtesse que le seul corps F lui auroit donnée en ce sens, pendant que cette Régle toûjours parallele à elle-même, l'emporteroit vers CD de la vîtesse que le seul corps E auroit donnée vers là à ce corps A : il est visible que lorsque ce corps A arrivera en D avec la Régle AB en CD, s'il y rencontre deux autres corps durs *f*, *e*, sur les lignes CD, BD, prolongées, son mouvement suivant cette Régle AB, c'est-à-dire alors, suivant CD, lui fera pousser en ce sens le corps *f* de la force dont il la parcourt; & que celui qu'il a avec cette Régle suivant BD, lui fera pareillement pousser en ce sens le corps *e* de la force dont ce corps A se meut avec cette Régle. Donc ces corps *f*, *e*, doivent effectivement être poussez par le corps A en arrivant en D suivant AD par le concours d'action des corps F, E, qui (*Hyp.*) le choquent à la fois. Par consequent la force qui lui résulte du concours de celles qu'il communique ainsi aux corps *f*, *e*, étant moindre (*Corol.* 1.) que leur somme, & égale à ce qu'il en perd par cette communication qu'on voit résulter de son choc contre ces deux corps *f*, *e*, à la fois; il suit qu'alors il leur communique plus de force, & consequemment aussi (*Ax.* 1.) plus de mouvement qu'il n'en perd par cette communication. Donc s'il y a (*art.* 4.) du FIG. 15

D

mouvement perdu dans le choc simultanée des deux corps E, F, contre le corps A, il y en a aussi de regagné dans le choc de ce corps A contre les deux corps *e*, *f*, à la fois.

VI. Il est vrai qu'il ne leur en donne pas tant que les corps E, F, en ont perdu en le choquant : un corps dur qui en choque un autre pareillement dur, ne lui communiquant jamais tout son mouvement : mais les corps *e*, *f*, en pourront de même (*art.* 5.) donner à d'autres plus qu'ils n'en perdront, ceux-ci encore à d'autres, & ainsi à l'infini ; outre que ce gain pourroit même se faire sans aucune perte précedente, si le corps A étoit poussé suivant AD contre les corps *e*, *f*, par une seule force simple égale à la résultante du concours des chocs de E, F, contre lui, l'effet de cette force unique étant la même chose (*Corol.* 2.) que celui de ce concours. D'où l'on voit dans le choc des corps durs, que par cette décomposition (*art.* 5.) de mouvemens il peut fort bien y avoir à peu près autant de gain de forces ou de mouvemens, que de perte (*art.* 4.) par leur composition ; ce qui suffit pour l'explication des Phenomenes. Des corps à ressort l'auroient fait voir dans une moindre suite de chocs ; mais il auroit fallu toûjours revenir aux petits corps durs qui en causent le ressort.

Une telle compensation de gain & de perte de mouvement, pouvant en conserver dans le monde une quantité moralement égale ; les Cartesiens effrayez de ce qui s'en perd (*Corol.* 1.) dans les mouvemens composez, doivent se rassûrer d'autant plus que cette égalité morale est suffisante & beaucoup plus propre pour l'explication des Phenomenes, que la Métaphysique & rigoureuse supposée par M. Descartes pour l'établissement des Régles du mouvement, dont la plûpart se trouvent fausses par les autres principes même de cet Auteur.

Au reste, je ne me suis tant étendu ici sur cet article, que pour satisfaire un Cartesien que la perte de mouvement qui se fait (*art.* 4.) dans les composez, a soulevé

contre ces sortes de mouvemens dans les *Nouvelles de la Republique des Lettres* du mois d'Avril 1705. art. 2. pag. 389. & suiv.

Quoique les Lemmes & les Corollaires qui précedent, ne soient que pour des points mûs chacun par le concours de plusieurs puissances quelconques dirigées à volonté; l'application qu'on vient de faire à des corps dans le Scholie précedent, ne laisse pas de valoir, ces corps pouvant être pris si petits qu'on voudra. Voici presentement pour toutes sortes de corps, grands ou petits, mûs de même par le concours de plusieurs puissances quelconques dirigées à volonté.

LEMME III.

Soit presentement un corps quelconque EFGH sans pesanteur, poussé par le concours de deux puissances E, F, appliquées comme l'on voudra en E, F, suivant de directions EC, FB, qui fassent entr'elles en A quelque angle CAB que ce soit, dont les côtez AC, AB, soient entr'eux comme ces puissances E, F, soit de ces côtez fait le parallelogramme ABDC, sur la diagonale AD, duquel soit MN perpendiculaire en A, & rencontrée en M, N, par BM, CN, paralleles à cette diagonale AD, sur laquelle prolongée (s'il est necessaire) soient aussi BP, CQ, perpendiculaires en P, Q. Cela fait, & la diagonale AD (prolongée ou non) passant par quelqu'un des points du corps EFGH, je dis, FIG. 4. 5. 6. 7.

I. *Que ce corps EFGH reçoit de chacune des puissances E, F, deux impressions à la fois: sçavoir, de la seule puissance E, deux impressions suivant AQ, AN, dont les forces sont à cette puissance E, comme ces côtez AQ, AN du parallelogramme NQ sont à la diagonale AC; & de même de la puissance F, deux impressions suivant AP, AM, dont les forces sont aussi à cette puissance F, comme ces côtez AP, AM, du parallelogramme AP sont à la diagonale AB.*

II. *Que ce que la puissance E employe de force, ou fait d'effort suivant AD sur ce corps EFGH, est à ce que la puis-*

sance F en fait sur lui suivant la même ligne, pour ou contre, comme AQ, est à AP.

III. *Que le surplus de force suivant AN, AM, des puissances E, F, se détruit ou s'empêche toûjours mutuellement.*

IV. *Qu'enfin le corps EFGH ainsi poussé par ces deux puissances E, F, à la fois, parcourra la diagonale AD du parallelogramme BC, ou la valeur de cette diagonale suivant sa direction de A vers D, par le concours d'action de ces deux puissances E, F, dans le même tems que separément elles lui auroient fait parcourir les côtez correspondans AC, AB, de ce parallelogramme, ou des longueurs équivalentes à ces côtez suivant leurs directions de A vers C, B.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Soient ET, EV, perpendiculaires en T, V, à CN, CQ, prolongées ; & FR, FS, perpendiculaires aussi en R, S, à BM, BP, prolongées, s'il est necessaire. (*Corol.* 2. *du Lem.* 2.) La puissance E dirigée (*Hyp.*) suivant EC, fait seule sur le point E du corps EFGH la même impression que deux autres puissances feroient ensemble sur ce point, l'une suivant EV, l'autre suivant ET, à chacune desquelles dirigées suivant ces lignes, la puissance E seroit comme EC à chacune de ces mêmes lignes EV, ET. Le corps EFGH reçoit donc en son point E deux impressions differentes à la fois de la seule puissance E : sçavoir, une suivant EV, ou AQ, d'une force qui est à celle de cette puissance E (*Lem.* 2. *Corol.* 1.) :: EV. EC :: AQ. AC. Et l'autre suivant ET ou AN, d'une force qui est aussi à cette même puissance E (*Lem.* 2. *Corol.* 1.) :: ET. EC :: AN. AC. On démontrera de même que ce même corps EFGH reçoit en son point E deux impressions differentes à la fois de la seule puissance F : sçavoir, une suivant FS ou AP, d'une force qui est à celle de cette puissance F :: FS. FB :: AP. AB. Et l'autre suivant FR, ou AM, d'une force qui est aussi à cette même puissance F :: FR. FB :: AM. AB. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

PART. II. Cela étant, si l'on appelle Q, N, ce que la puissance E employe ainsi de forces ou fait d'efforts suivant AQ, AN, sur le corps EFGH; & P, M, ce que la puissance F en fait de même sur lui suivant AP, AM; l'on aura ici Q. E :: AQ. AC. Et P. F. :: AP. AB. Donc (en raison ordonnée entre ces deux dernieres analogies) l'on aura ici P. E :: AP. AC. ou E. P :: AC. AP. Donc aussi (en raison ordonnée entre cette derniere analogie & la premiere de toutes) l'on aura pareillement ici Q. P :: AQ. AP. C'est-à-dire, suivant les noms précedens, que ce que la puissance E employe de force ou fait d'effort (Q) sur le corps EFGH suivant la diagonale AD, du parallelogramme BC, est à ce que la puissance F en fait (P) sur ce corps suivant la même direction sur ce corps en même sens, ou en sens contraire, comme AQ est à AP. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PART. III. La Part. 1. donnant encore suivant les noms précedens de la Part. 2. N. E :: AN. AC. Et M. F :: AM. AB. La supposition qu'on fait ici de F. E :: AB. AC. donnera (en raison ordonnée entre ces deux dernieres analogies) M. E :: AM. AC. ou E. M :: AC. AM. Donc (en raison encore ordonnée entre cette derniere analogie, & la premiere de toutes celles-ci) l'on aura pareillement ici N. M :: AN. AM. De sorte que les triangles (*constr.*) semblables APB, DQC, qui ont AB=CD, & AB. CD :: BP. CQ :: AM. AN. donnant ainsi AM=AN, donnent aussi M=N: c'est-à-dire, les efforts M, N, suivant AM, AN, des puissances F, E, non seulement directement contraires, mais encore toûjours égaux entr'eux. Donc (*Ax.* 3.) ces efforts M, N, se détruisent ou s'empêchent toûjours mutuellement. *Ce qu'il falloit 3° démontrer.*

PART. IV. Puisque la Part. 2. donne Q. P :: AQ. AP. l'on aura aussi Q. Q±P :: AQ. AQ±AP. Mais on voit dans cette Part. 2. que la Part. 1. donne E. Q :: AC. AQ. Donc (en raison ordonnée) E. Q±P :: AC. AQ± AP. Or le parallelogramme BC, & les angles (*constr.*)

droits en P, Q, rendant les triangles APB, DQC, semblables & égaux en tout, donnent AP=DQ. Donc aussi E. Q ± P :: AC. AQ ± DQ. sçavoir, E. Q+P :: AC. AQ+DQ :: AC. AD. dans les Fig. 4. 6. Et E. Q—P :: AC. AQ—DQ :: AC. AD. dans les Fig. 5. 7. Or (*Part.* 1. 2. 3.) la somme Q+P des forces P, Q, dans les Fig. 4. 6. & leur difference Q—P dans les Fig. 5. 7. est tout ce que les puissances E, F, dirigées suivant leurs proportionnelles AC, AB, en impriment par leur concours d'action au corps EFGH. Donc ce corps sera ici poussé de A vers D suivant AD par le concours de ces deux puissances E, F, & d'une force à laquelle elles seront comme les côtez correspondans AC, AB du parallelogramme ABCD sont à la diagonale AD. Donc aussi (*Ax.* 8.) ce corps EFGH, libre d'ailleurs, parcourra la diagonale AD du parallelogramme BC, ou une longueur équivalente suivant la même direction de A vers D, par le concours d'action de ces deux puissances E, F, dans le même tems que chacune d'elles separément lui auroit fait parcourir les côtez correspondans AC, AB, de ce parallelogramme, lesquels leur sont (*Hyp.*) proportionnels, ou des longueurs équivalentes suivant leurs directions de A vers C, B. *Ce qu'il falloit 4°. démontrer.*

COROLLAIRE I.

Des forces égales suivant les mêmes directions ayant (*Ax.* 2.) les mêmes effets, c'est la même chose que le corps EFGH soit poussé en ses points E, F, par les puissances E, F, suivant EC, FB, ou qu'il soit tiré en ses points G, H, par les mêmes puissances, ou par d'égales suivant les mêmes directions GC, HB. Donc soit que ce corps EFGA soit poussé, ou tiré à la fois vers C, B, suivant les directions AC, AB, par deux puissances E, F, ou G, H, qui soient entr'elles comme ces côtez du parallelogramme ABCD.

1°. Ces deux puissances E, F, lui donneront ensemble par leur concours d'action (*Part.* 4.) une impression

ou force de A vers D suivant la diagonale AD de ce parallelogramme BC, capable de la lui faire parcourir, ou une longueur équivalente en même sens de A vers D, dans le même tems que chacune d'elles separément lui auroit fait parcourir chacun des côtez AC, AB de ce parallelogramme, lesquels leur sont (*Hyp.*) proportionnels; & consequemment les directions de ces deux puissances E, F, & de la force résultante de leur concours, seront toutes trois dans un même plan.

2°. Cette force résultante du concours de ces deux puissances E, F, ou G, H, à ce corps AFGH suivant cette diagonale AD du parallelogramme BC, sera donc (*Ax.* 8.) à chacune de ces deux puissances, comme cette diagonale AD à chacun des côtez correspondans AC, AB de ce parallelogramme, proportionnels (*Hyp.*) à ces puissances, desquelles ils sont aussi (*Hyp.*) les directions.

3°. Ce que chacune de ces deux puissances E, F, ou G, H, employe de force ou fait d'effort suivant cette même ligne AD en même sens dans les Fig. 4. 6. ou en sens contraires dans les Fig. 5. 7. est (*Part.* 2.) à chacune d'elles comme chacune des parties AQ, AP, de cette même ligne AD, prolongée dans les Fig. 5. 7. est à chacun des côtez correspondans AC, AB du parallelogramme ABCD.

4°. Ce que ces deux puissances E, F, ou G, H, employent de force sur le corps EFGH suivant AD, étant tout ce que leur concours d'action sur lui leur en laisse; puisque (*Part.* 3.) le surplus de ce qu'elles en auroient separément suivant AN, AM, se détruit ou s'empêche mutuellement par son égalité & contrarieté directe : si l'on arrête ou détruit aussi cette force ou impression commune suivant AD, en lui opposant directement un obstacle invincible, ou du moins qui lui soit égal en quelque point X, où cette direction AD prolongée rencontre le corps E, F, G, H; ces deux puissances E, F, ou G, H, demeureront en équilibre entr'elles avec ce corps en repos sur cet appui X, sans qu'aucune d'elles se puisse-

faire pancher ou mouvoir d'aucun côté, chacune d'elle se trouvant alors entierement épuisée de force par une extinction de leurs composantes suivant AN, AQ, pour la premiere E ou G de ces deux puissances, & suivant AM, AP, pour la seconde F ou H.

5°. Enfin de ce que les efforts de A vers D suivant AD, des puissances E, F, sont en general (*Part.* 2.) :: AQ. AP :: :: AQ×AD. AP×AD. Il suit que si l'angle BAC des directions de ces puissances est droit, par exemple, dans quelqu'une des Fig. 4. 6. un tel angle rendant $\overline{AC}^2$=AQ×AD, & $\overline{AB}^2$=AP×AD, les efforts suivant AD, de ces deux puissances E, F, seront aussi pour lors entr'eux :: $\overline{AC}^2$. $\overline{AB}^2$ c'est-à-dire (*nomb.* 2.) comme les quarrez de ces mêmes puissances.

COROLLAIRE II.

Il suit de ce Corol. 1. nomb. 1. que tant que les directions de deux forces ou puissances qui agissent ensemble sur un même corps, feront ensemble quelqu'angle entr'elles, ce corps doit se mouvoir suivant une troisiéme ligne à travers de cet angle du côté que ces deux forces ou puissances conspirent à le pousser ou à le tirer, à moins que quelque obstacle ne s'y oppose comme dans le nomb. 4. de ce Corol. 1. Par consequent s'il arrive que ce corps ainsi poussé ou tiré demeure en repos, sans que rien d'ailleurs l'empêche d'être mû par le concours d'action des deux puissances qui le poussent ou le tirent, il faut,

1°. Que ces deux puissances soient dirigées suivant une même ligne droite.

2°. Qu'elles y agissent en sens contraires; autrement elles s'accorderoient à le mouvoir suivant cette ligne.

3°. Qu'elles soient égales entr'elles; autrement il s'y meuvroit encore (*Ax.* 5.) dans le sens de la plus forte des deux.

Ainsi lorsqu'un corps poussé ou tiré par deux forces à la

à la fois, ne laisse pas de demeurer en repos, & elles en équilibre sur lui, sans qu'aucun obstacle étranger les y retienne comme dans le nomb. 4. du Corol. 1. ou autrement; il faut necessairement alors que ces deux forces agissent en sens contraires suivant une même ligne droite, & qu'elles soient égales entr'elles.

COROLLAIRE III.

Il suit de même du Corol. 1. nomb. 1. qu'un poids attaché au bout d'une corde accrochée par l'autre bout à un clou, ou sur un pieu mobile autour d'un appui, & sans autre obstacle que la résistance de cette corde ainsi attachée, ou de ce pieu ainsi appuyé, ne s'arrêtera en repos que lorsque la direction de sa pesanteur sera en ligne droite avec la leur; & qu'alors leurs résistances seront égales chacune à sa pesanteur.

COROLLAIRE IV.

Il suit de plus du Corol 1. nomb. 1. que non seulement l'impression résultante du concours d'action des puissances E, F, ou G, H, dirigées suivant les côtez AZ, AY, d'un angle quelconque ZAY, doit se faire suivant une ligne droite AO, qui passe à travers cet angle; mais encore que tout parallelogramme BC, dont la diagonale AD sera sur cette droite AO, & les côtez AC, AB, sur AZ, AY, aura ces mêmes côtez AC, AB, entr'eux en raison des puissances E, F, en G, H, dont ils sont (*Hyp.*) les directions: autrement l'impression résultante du concours d'action de ces deux puissances sur le corps EFGH, ne se feroit pas suivant la diagonale AD du parallelogramme BC; ce qui est contre l'hypothese: mais (*Corol. 1. nomb.* 1.) suivant celle d'un autre parallelogramme, dont les côtez pris aussi sur les directions AZ, AY, de ces deux puissances E, F, ou G, H, seroient entr'eux en raison de ces deux mêmes puissances.

COROLLAIRE V.

Donc aussi lorsque l'impression résultante au corps EFGH du concours d'action de ces deux puissances E, F, ou G, H, dirigées suivant AZ, AY, se fait suivant AO, tout parallelogramme BC, dont la diagonale AD est sur AO, & les côtez AC, AB, sur AZ, AY, aura cette diagonale AD à chacun de ces côtez AC, AB, comme l'impression résultante du concours de ces deux puissances E, F, ou G, H, sera à chacune d'elles ; puisque ces deux puissances étant alors entr'elles (*Corol.* 4.) comme ces côtez correspondans AC, AB, sont aussi (*Corol.* 1. *nomb.* 2.) à l'impression résultante de leur concours d'action sur le corps EFGH, comme ces mêmes côtez AC, AB, du parallelogramme BC sont à sa diagonale AD.

COROLLAIRE VI.

Il suit aussi du Corol. 1. nomb. 2. que le corps EFGH ainsi poussé ou tiré suivant AD, par le concours des puissances E, F, ou G, H, dirigées suivant leurs proportionnelles AC, AB, l'est de même que s'il l'étoit en ce sens de A vers D suivant la même AD par une seule puissance qui fût à chacune de ces deux-là comme cette diagonale AD du parallelogramme BC est à chacun de ses côtez correspondans AC, AB ; & reciproquement.

D'où l'on voit que la pesanteur d'un corps suivant la direction AD, ne fait sur lui que ce qu'y feroient ensemble deux puissances ou forces dirigées suivant les côtez AC, AB, d'un parallelogramme quelconque BC, dont cette direction AD feroit diagonale, & qui feroient à la pesanteur de ce corps comme ces côtez AC, AB, seroient à cette diagonale AD. Et comme cette diagonale peut être celle d'une infinité de parallelogrammes differens, on voit aussi que la pesanteur d'un corps pourroit résulter d'un concours d'une infinité de forces prises ainsi deux à deux : & comme chacune de celles-ci pour-

roit de même résulter de deux autres, chacune desquelles pourroit aussi résulter de deux autres, & ainsi à l'infini; il est visible que la pesanteur d'un corps lui peut résulter du concours de plusieurs forces differentes issues de chocs faits contre lui par plusieurs parties à la fois du fluide dans lequel il pese ou tombe; il y a même bien de l'apparence que c'est la cause de sa pesanteur.

COROLLAIRE. VII.

Suivant le précedent Corol. 6. un corps dur A sans pesanteur, poussé par une seule force ou puissance E suivant ED, oblique à un plan dur & immobile GH, que ce corps rencontre en C, l'étant de même que s'il l'étoit par le concours de deux puissances ou forces dirigées suivant les côtez AC, AB du parallelogramme rectangle BC, lesquelles fussent à la puissance E comme ces côtez sont à la diagonale AD de ce parallelogramme. Ce plan GH étant directement opposé à celle de ces deux autres forces, qui seroit suivant AC, & nullement à celle qui seroit suivant AB, recevroit & soûtiendroit (*Ax.* 3.) tout le coup de la premiere, sans rien recevoir ni soûtenir de la seconde. Donc, FIG. 1.

1°. Le corps A poussé de la force E suivant ED ou AD, frapperoit en C le plan GH d'une force qui seroit à cellà, comme AC est à AD.

2°. Il couleroit après cela de C vers H suivant CH de la force qui lui resteroit seule & toute entiere suivant AB, laquelle seroit à la force E, comme AB, ou CD est à AD.

COROLLAIRE VIII.

Donc pour qu'un corps poussé ou tiré demeure en repos sur un plan, il faut qu'il le soit suivant une perpendiculaire à ce plan en un point où il le touche, ou compris entre ceux où il le rencontre; & réciproquement si ce corps est ainsi poussé ou tiré contre ce plan, il y doit (*Ax.* 3.) demeurer en repos, n'ayant (*Hyp.*) que cette

impreſſion ou force perpendiculaire, à laquelle la réſiſtance invincible du plan eſt alors directement oppoſée.

COROLLAIRE IX.

Tout cela, c'eſt-à-dire, tout ce qu'on voit du plan GH dans les Corol. 7. 8. ſe doit auſſi entendre d'une ſurface quelconque immobile MCN, touchée en C par ce plan perpendiculaire (*Hyp.*) à la direction AC de ce que le corps A a de force en ce ſens, c'eſt-à-dire, d'une ſurface courbe perpendiculaire en C à cette direction; puiſque c'eſt par la réſiſtance directement oppoſée de ce point ou élement commun à cette ſurface courbe quelconque MCN, & à ſon plan touchant GH, que ce plan ſoûtient (*Ax.* 3.) toute la force du corps A ſuivant AC, ſans s'oppoſer en aucune maniere à ſa force ſuivant AB, ou CH. D'où l'on voit que ce corps A pouſſé ſuivant ED, ou AD par la force E, rencontrant ainſi perpendiculairement en C la ſurface courbe & immobile MCN, devroit continuer ſon mouvement ſuivant la tangente GH de cette même courbe, & demeurer & ſur l'une & ſur l'autre en repos en C, s'il n'étoit pouſſé ou tiré contr'elles que ſuivant leur commune perpendiculaire AC, à l'extrêmité C de laquelle il le touchât.

COROLLAIRE X.

FIG. 9. Soit preſentement le corps EFGH pouſſé ou tiré à la
PLANC. 2. fois par tant de puiſſances E, F, G, H, &c. qu'on voudra,
FIG. 10. ſuivant des directions quelconques EC, FB, GM, HN, &c. rencontrées chacune par quelqu'une d'entr'elles, ou par quelqu'une de celles des forces réſultantes du concours de deux ou de pluſieurs puiſſances propoſées. Soit le parallelogramme BC, dont les côtez AC, AB, pris ſur les directions concourantes en A des puiſſances E, F, ſoient entr'eux comme ces mêmes puiſſances, & dont la diagonale DA prolongée rencontre en K la direction GM de la puiſſance G. Soit priſe ſur elle KR=AD, & KM: AC :: G. E. De ces deux côtez KR, KM, ſoit fait le pa-

rallelogramme RM dont la diagonale KL rencontre en S la direction NH de la puissance H. Soit aussi prise SQ=KL, & SN. AC :: H. F. De ces deux côtez SQ, SN, soit pareillement fait le parallelogramme NQ de la diagonale SP, duquel on se servira comme l'on vient de faire des autres AD, KL, s'il y a davantage de puissances; & toûjours de même en quelque nombre qu'elles soient.

Cela fait, il suit des nomb. 1. 2. du Corol. 1. que le corps EFGH, ainsi poussé ou tiré par toutes ces puissances à la fois, le sera toûjours par leur concours suivant la diagonale du dernier des parallelogrammes faits comme ci-dessus, & d'une force qui sera à chacune de ces puissances E, F, G, H, &c. comme cette derniere diagonale (qui est ici SP) à chacune de leurs proportionnelles AC, AB, KM, SN, &c.

Car selon les nomb. 1. 2. du Corol. 1. l'impression résultante du concours des puissances E, F, au corps EFGH, est suivant AD, ou KR, & d'une force qui est à la puissance E :: AD. AC (à cause de KR=AD) :: KR. AC. Mais (*Hyp.*) E. G :: AC. KM. Donc (en raison ordonnée) la force résultante du concours des deux puissances E, F, au corps EFGH suivant KR, est à la force ou puissance G :: KR. KM. Donc aussi (*Corol.* 1. *nomb.* 1. 2.) l'impression résultante à ce corps du concours de ces deux dernieres forces, c'est-à-dire, du concours des trois E, F, G, est suivant KL ou SQ, & d'une force qui est à la puissance G :: KL. KM (à cause de SQ=KL) :: SQ. KM. Mais (*Hyp.*) G. E :: KM. AC. Et E. H :: AC. SN. Donc le corps EFGH est poussé ou tiré suivant SQ par le concours des trois puissances E, F, G, d'une force qui est à la puissance H :: SQ. SN. Donc aussi (*Corol.* 1. *nomb.* 1. 2.) ce corps est poussé ou tiré suivant SP par le concours de ces deux forces-ci, c'est-à-dire, par le concours des quatre E, F, G, H, d'une force qui est à la puissance H :: SP. SH. Et consequemment qui est à chacune des quatre E, F, G, H, du concours desquel-

les on la voit résulter, comme SP est à chacune de leurs proportionnelles AC, AB, KM, SN; & ainsi de tant d'autres qu'on voudra, ainsi qu'on le vient d'avancer.

COROLLAIRE XI.

Suivant cela le corps EFGH ici poussé ou tiré suivant SP par le concours des puissances E, F, G, H, dirigées suivant AC, AB, KM, SN, & en même raison entr'elles que ces côtez des parallelogrammes BC, MR, NQ, l'est de même (*Ax.* 2.) qu'il le seroit par une seule puissance dirigée de S vers P suivant cette derniere diagonale SP, & qui fût à chacune des précedentes E, F, G, H, comme SP est à chacune de leurs proportionnelles AC, AB, KM, SN; puisque (*Corol.* 10.) cette nouvelle puissance suivant SP, seroit égale à la résultante en ce sens du concours d'action de toutes celles-là.

COROLLAIRE XII.

Donc si l'on place en quelque point X de rencontre du corps EFGH par la derniere diagonale SP, un appui ou une puissance directement contraire suivant XS à la force résultante du concours des précedentes E, F, G, H, suivant cette derniere diagonale SP, & d'une puissance ou force égale à cette résultante; cet appui ou cette puissance X (*Corol.* 1. *du princ. gener.*) retiendra le tout en équilibre ou en repos: & reciproquement, si cet appui ou cette puissance contraire retient ainsi le tout en repos, il faut (*Ax.* 4.) que lui ou elle soit d'une résistance ou force égale à la résultante du concours des puissances E, F, G, H, & suivant la ligne de direction PS de cette force résultante à contre-sens.

COROLLAIRE XIII.

FIG. 4. 5. 6. 7. Lorsque toutes les forces concourantes E, F, G, H, se réduisent à deux E, F, comme dans les Fig. 4. 5. 6. 7. du present Lem. 3. alors AD étant la premiere & la derniere des diagonales trouvées dans le Corol. 10. ce qu'on

vient de voir de SP dans les Fig. 9. 10. se doit dire aussi de AD dans les Fig. 4. 5. 6. 7. Par consequent (*Corol.* 12.) si l'on place en quelque point X de ceux où la diagonale AD rencontre le corps EFGH, un appui ou une puissance directement contraire suivant AD à la force résultante du concours des deux E, F, suivant la même AD, & d'une résistance ou force égale à cette résultante à contre-sens ; cet appui ou cette puissance X retiendra le tout en équilibre conformément au nomb. 4. du Corol. 1. Et reciproquement si le tout est ainsi retenu en équilibre par cet appui ou par une puissance, cet appui doit être d'une résistance, ou cette puissance d'une force égale à la résultante du concours des puissances E, F, & suivant la direction DA de cette force résultante à contre-sens. D'où l'on voit que cet appui ou la puissance substituée en sa place contre la force résultante du concours des puissances E, F, doit être alors dans leur plan, c'est-à-dire, avoir sa résistance dans le plan des directions des puissances E, F, & une direction qui passe à travers l'angle BAC de celles-là.

COROLLAIRE XIV.

Donc aussi trois puissances E, X, F, appliquées comme l'on voudra à un même corps DE ne peuvent demeurer en équilibre entr'elles, & le tenir ainsi en repos, à moins que leurs trois directions ne passent le long d'un même plan, par un même point, chacune à travers l'angle compris entre les deux autres ; ce qu'on verra dans la suite s'étendre jusqu'au parallelisme de ces trois directions entr'elles : puisque celle X de ces trois puissances qui résistera seule aux deux autres, doit (*Corol.* 12.) avoir pour cet équilibre une direction qui soit la même à contre-sens que celle AD de la force résultante du concours des deux autres E, F, & consequemment une direction XA qui (comme AD) passe par le concours A des directions AC, AB, de ces deux autres puissances E,

F, dans le plan de ces deux directions-ci, & à travers leur angle BAC.

COROLLAIRE XV.

Fig. 11. 12. D'où l'on voit que si un poids BCGH, dont DX soit la direction de la pesanteur qu'on lui suppose presentement, est soutenu par deux puissances E, F, avec des cordes EC, FB; la direction DX prolongée de ce poids ainsi en équilibre avec ces deux puissances, passera toûjours par le concours A de leurs directions prolongées EC, FB, dans leur plan, & à travers leur angle BAC; puisque sans cela ces deux puissances E, F, & la pesanteur de ce corps, qui en est une troisiéme, ne seroient point (*Corol.* 14.) en équilibre entr'elles; ce qui est contre l'hypothese.

Ce sera la même chose (*Ax.* 2.) si au lieu des deux puissances E, F, on suppose deux clous en leur place, ausquels leurs deux cordes soient accrochées.

COROLLAIRE XVI.

Fig. 12. Donc aussi le poids BCGH de la Fig. 12. suspendu à un seul clou A par le moyen de deux cordes CA, BA, qui y seroient accrochées, n'y peut être en équilibre ou en repos que lorsque sa direction DX passera par ce point de concours A, puisque (*Ax.* 2.) ce clou ou crochet A résisteroit ici suivant AC, AB, au poids BCGH, comme feroient les deux puissances E, F, en équilibre avec lui, si toutes deux en ce point A, elles lui étoient appliquées suivant les mêmes directions EC, FB.

COROLLAIRE XVII.

Fig. 11. De même dans la Fig. 11. les puissances E, F, résistant au poids BCGH par le moyen des cordes EC, FB, comme feroient (*Ax.* 2.) deux pieux AG, AH, suivant les mêmes directions; ce poids BCGH ne peut demeurer non plus (*Corol.* 15.) en équilibre ou en repos sur ces deux pieux appuyez en A, que lorsque la direction DX passera par

par ce point de concours A, ſur lequel on ſuppoſe ces deux pieux mobiles ſans pouvoir gliſſer.

COROLLAIRE XVIII.

Il en ſeroit de même non ſeulement dans la Fig. 11. ſi ces deux pieux, au lieu d'être appuyez en A, l'étoient en M, N, ſur un plan ou ſurface fixe quelconque PQ, ſur laquelle ils ne puſſent que ſe mouvoir autour de ces deux points M, N, ſans gliſſer; mais encore dans la Fig. 12. ſi MG, NH, y étoient deux pieux ainſi appuyez en M, N, ſur la ſurface fixe PQ, & que leurs directions concouruſſent en A: on prouvera, dis-je, de même encore que le poids BCGH, ne peut point du tout être en repos ſur ces deux pieux des Fig. 11. 12. ſoit que les directions de ces pieux concourent haut ou bas, à moins que celle DX de ce poids ne paſſe par leur point de concours A. FIG. 11.

COROLLAIRE XIX.

Si l'on imagine preſentement en équilibre entr'elles quatre puiſſances E, H, G, F, appliquées à autant de cordons CE, CH, BG, BF, attachez deux à deux aux extrêmitez C, B, d'une autre corde, ou verge CB, & qui prolongées concourent auſſi deux à deux en deux autres points quelconques AD; il ſuit encore du précedent Corol. 14. que l'effort réſultant du concours d'action des deux puiſſances H, G, de directions concourantes en D, & le réſultant du concours d'action des deux puiſſances E, F, de directions concourantes en A, auront DA pour direction commune en ſens contraires; puiſque l'effort réſultant du concours d'action en D des deux puiſſances H, G, en équilibre (*Hyp.*) avec les deux autres E, F, fait la fonction d'une nouvelle puiſſance qui égale à lui, & appliquée en D ſuivant ſa direction, feroit ſeule équilibre avec ces deux-ci E, F, & que reciproquement l'effort réſultant du concours d'action en A de ces deux dernieres puiſſances E, F, fait la fonction FIG. 13.

d'une nouvelle puiſſance, qui égale à lui, & appliquée en A ſuivant ſa direction, feroit ſeule équilibre avec les deux autres puiſſances H, G.

Ce raiſonnement conviendra également à tout ce qu'on voudra exprimer d'autres cas de ce Corol. 19. par rapport à ce que les points A, D, peuvent avoir de poſitions differentes de celles qu'on leur voit dans la preſente Fig. 13. qui ſeule ſuffit ici, les autres étant aiſées à imaginer ſur elle.

COROLLAIRE XX.

Deux clous ou crochets en E, F, à la place des deux puiſſances de ces noms réſiſtant (*Ax.* 2.) comme elles aux deux autres puiſſances H, G, il ſuit du précedent Corol. 19. que la direction de l'effort réſultant du concours d'action de ces deux dernieres puiſſances H, G, paſſeroit toûjours du concours D de leurs directions par le concours A des directions des cordons accrochez aux crochets ſuppoſez en E, F.

SCHOLIE.

I. N'y ayant dans une queſtion que ce qu'on y ſuppoſe, il eſt viſible que ne ſuppoſant dans le preſent Lem. 3. aucune réſiſtance differente de ce que les puiſſances ſuppoſées s'en peuvent faire l'une à l'autre comme dans la Part. 3. de ce Lemme, ce feroit ſortir de la queſtion, que de vouloir en conſiderer ici d'autre que celle-là. Il ne faut cependant pas dire pour cela que les mouvemens précedens n'étant tels qu'on les vient de démontrer, que dans le vuide, le rapport des forces qu'on en a conclu, ne feroit d'aucun uſage dans un milieu réſiſtant ; puiſque l'équilibre qu'on en verra réſulter dans la ſuite conformément au Corol. 1. du principe general, ſe feroit dans le plein comme dans le vuide, le plein ne réſiſtant qu'au mouvement, & non au repos: de ſorte que ſi deux ou pluſieurs forces appliquées à un même corps, ſe ſoûtenoient mutuellement en équilibre ſur ce corps en repos dans un eſpace vuide, elles s'y ſoûtiendroient appli-

ques de même dans un eſpace plein. D'où l'on voit non ſeulement que le rapport des forces, qui cauſeroit l'équilibre dans le vuide, le cauſeroit auſſi dans le plein où elles auroient de ſemblables applications ; mais encore que la ceſſation de ce rapport, ou de la reſſemblance des applications de ces forces, qui cauſeroit la rupture de l'équilibre dans le vuide, la cauſeroit auſſi dans le plein avec cette ſeule difference que le mouvement qui en réſulteroit, ſe feroit plus lentement dans le plein que dans le vuide, à moins que cette difference de forces ne fût au deſſous de la moindre réſiſtance poſſible du plein. Donc en fait d'équilibre, il ſeroit inutile de demander s'il ſe fait dans le plein ou dans le vuide, pour avoir (du moins à une petite difference près) le rapport des forces qui le cauſent, & reciproquement. C'eſt pour cela qu'à l'exemple de tout ce qu'il y a eu d'Auteurs qui ont traité cette matiere, nous ne parlerons plus de cette difference des milieux.

II. Quant aux frottemens des corps les uns contre les autres, l'accrochement (pour ainſi dire) que l'aſperité de leurs ſurfaces peut cauſer entr'eux par l'engrenement des parties de ces ſurfaces les unes dans les autres, faiſant (comme le peu de réſiſtance du plein) la fonction d'une force ou puiſſance qui retiendroit ainſi les corps les uns contre les autres, & toûjours en faveur des plus foibles contre les plus fortes qui leur ſeroient appliquées, pourroit fort bien aider à les retenir en équilibre, ſans que ces autres puiſſances fuſſent entr'elles dans le rapport qu'il faudroit dans le vuide pour cela ſi ces frottemens n'étoient d'aucune réſiſtance, quoique ni eux, ni la réſiſtance du plein ne puiſſent l'empêcher quand ce rapport s'y trouvera. C'eſt ce qui nous fera négliger dans la ſuite ces frottemens avec la réſiſtance du plein, comme s'ils n'en faiſoient aucune ; ſauf à y compter ſuivant l'Ax. 2. & la Demand. 1. tout ce qu'ils en ont, en le prenant pour une puiſſance d'une force ou réſiſtance qui lui ſoit égale, quand on l'aura connu.

Les Géometres à qui les trois Lemmes précedens avec leurs Corollaires, se presentent tout d'un coup, seront sans doute surpris de la maniere scrupuleuse dont je viens de les démontrer, & du grand détail que j'en viens de faire: aussi aurois-je supposé tout cela comme connu, si je n'avois eu affaire qu'à eux; mais j'écris pour des Commençans, à qui il faut tout expliquer, & ce d'autant plus ici, que c'est sur ces trois Lemmes, & sur le principe general qu'est fondé tout ce qu'on va voir des proprietez des Machines.

LEMME IV.

Plusieurs puissances étant appliquées à autant de cordons attachez ensemble par un seul & même nœud commun que rien autre chose ne retienne; l'équilibre est impossible entre ces puissances (quelles qu'elles soient, & quel qu'en soit le nombre) lorsqu'elles sont dirigées de maniere qu'un plan puisse passer par le nœud commun de leurs cordons sans passer entre elles, & sans qu'elles soient toutes dans ce plan.

DEMONSTRATION.

Il est manifeste qu'un plan qui rencontreroit ainsi tous les cordons des puissances supposées, auroit toutes ces puissances tirantes d'un seul côté par rapport à lui, ou quelques-unes tirantes vers ce côté-là pendant que toutes les autres tireroient suivant sa direction. Donc (*Corol. 6. du Lem. 2. & Corol. 10. du Lem. 3.*) de quelque maniere qu'on combine toutes ces puissances, il ne résultera du concours de toutes qu'une impression totale vers le côté qu'il y aura des puissances hors le plan supposé. Donc (*princ. gener.*) il ne pourra y avoir alors d'équilibre entre toutes ces puissances. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc quelques soient les directions de plus de deux cordons (en quelque nombre qu'ils soient) attachez tous ensemble par un seul & même nœud, & quelques puis-

ſances qu'on leur applique , une à chacun ; l'équilibre entr'elles ſera impoſſible.

1°. Dans le cas de tous leurs cordons en même plan, ſi la direction de quelqu'un d'eux ne diviſe pas quelqu'un des angles que les autres cordons font entr'eux ; puiſqu'un autre plan que le leur, mené ſuivant ce cordon-là, les rencontreroit alors tous en leur nœud commun, ſans paſſer à travers d'eux.

2°. Dans le cas des mêmes cordons en plans différens, ſi quelqu'un de ces plans prolongé ne paſſe non plus à travers des cordons des autres plans, puiſque celui-là ſera lui-même, alors un plan qui rencontrera auſſi tous ces cordons en leur nœud commun, ſans paſſer à travers d'eux.

COROLLAIRE II.

Il ſuit encore de ce Lemme-ci, quelques ſoient les directions de plus de deux cordons (en quelque nombre qu'ils ſoient encore) attachez tous enſemble par un ſeul & même nœud, qui ſoit regardé comme le centre d'un cercle ou d'une ſphere ; que ſi ces cordons ne ſont pas répandus en plus d'un demi-cercle, lorſqu'ils ſont tous en même plan, ou en plus d'une demi-ſphere, lorſqu'ils ſont en plans differens ; quelque puiſſance qu'on leur applique, une à chacun, elles ne pourront jamais être en équilibre entr'elles ſuivant ces directions : puiſqu'on pourra toûjours alors faire paſſer un plan par le nœud commun de ces cordons, ſans le faire paſſer entr'eux, & ſans qu'ils ſoient tous dans ce plan.

Il eſt viſible que chacun de ces Corollaires ſuit auſſi de l'autre, & qu'ils ſe prouvent mutuellement tous deux.

LEMME V.

I. *Lorſque tous les cordons iſſûs d'un même nœud, ſont dirigez ſuivant un même plan, & répandus en plus d'un demi cercle ; il n'y en a aucun qui prolongé par delà ce nœud commun, ne paſſe entre les autres cordons.*

Car s'il n'y paſſoit pas, il ſeroit le diamétre terminant d'un demi-cercle dans lequel ſeul lui & les autres cordons ſeroient alors tous répandus ; ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc, &c.

II. *Dans la même hypotheſe de tous les cordons dirigez ſuivant un même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle, quelque ligne droite qu'on mene ou qu'on imagine ſur ce plan par le nœud commun de tous ces cordons, ſans paſſer le long d'aucun d'eux, elle paſſera toûjours de part & d'autre de ce nœud, à travers deux des angles que ces cordons feront entr'eux.*

Car ſi elle ne paſſoit à travers aucun de ces angles, elle ſeroit le diamétre terminant d'un demi-cercle dans lequel ſeul tous ces cordons ſeroient alors répandus ; ce qui eſt contre l'hypotheſe. Et ſi cette ligne droite ne paſſoit à travers que d'un des angles de ces cordons, les deux cordons voiſins à droite & à gauche de cette ligne droite du côté où elle ne paſſeroit à travers aucun de leurs angles ſeroient en ligne droite terminante auſſi un demi-cercle, dans lequel ſeul tous ces cordons ſeroient alors répandus ; ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc toute ligne droite mene ſur le plan & par le nœud commun de tous ces cordons, paſſera toûjours à travers deux de leurs angles de part & d'autre de ce nœud. *Ce qu'il falloit démontrer*

III. *Lorſque ces cordons ſont dirigez ſuivant des plans differens, & répandus en plus d'une demie-ſphere ; il n'y a aucun de ces plans qui prolongé par de-là le nœud commun de ces cordons, ne paſſe entre les cordons des autres plans.*

Car s'il n'y paſſoit pas, il ſeroit le plan d'un grand cercle terminant une demie-ſphere, dans laquelle ſeule tous les cordons ſeroient alors répandus ; ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc, &c.

SCHOLIE.

La raiſon qui vient de faire voir (*Part.* 2.) que toute ligne droite menée par le nœud, & ſur le plan commun



de plusieurs cordons qui y seroient tous répandus en plus d'un demi-cercle, sans le faire passer le long d'aucun de ces cordons, passeroit toûjours à travers deux de leurs angles de part & d'autre de leur nœud commun : cette raison, dis-je, fera voir de même que tout plan mené par le nœud commun de plusieurs cordons répandus en plus d'une demie-sphere, sans le faire passer le long d'aucun d'eux, passeroit aussi toûjours à travers deux de leurs angles de part & d'autre de leur nœud commun.

Les Figures de ces deux derniers Lem. 4. 5. étant faciles à imaginer, on a negligé de les ajoûter ici, & ce dautant qu'il y auroit fallu exprimer des plans à angles differens avec celui de la Planche, plus difficiles à tracer, & à reconnoître sur elle, qu'à se les representer sur le discours que l'embarras de ces Figures n'auroit fait que rendre plus long & moins clair.

AVERTISSEMENT.

Jusqu'ici nous n'avons employé de Géometrie que quelque chose des six premiers Livres, & de l'onziéme des Elemens d'Euclide. Voici presentement quelques Lemmes de pure Géometrie, qui n'en suppose pas davantage : c'est pour rendre plus universelle l'application du précedent principe general aux machines, & pour faire qu'aucun cas n'échappe à la generalité de nos propositions, lesquelles n'exigeant dans le Lecteur que la valeur de ces sept Livres d'Euclide, seront (ce me semble) à la portée des Commençans attentifs : c'est pour eux que j'ajoûte les Définitions suivantes, qui ne se trouvent point dans Euclide.

DEFINITION IX.

Si d'un point quelconque D de la demi-circonference CDF d'un cercle, dont A soit le centre, on laisse tomber une perpendiculaire DE sur le diametre CF en E; cette perpendiculaire DE est également appellée *Sinus* des angles CAD, DAF, ou des arcs CD, DF, mesures de ces angles. Suivant la même dénomination le rayon BA per- FIG. 14.

pendiculaire aussi sur CF, est pareillement appellé *Sinus* de chacun des angles droits CAB, BAF, ou de chacun des quarts de cercle BC, BF, & comme ce Sinus AB est le plus grand de tous, on l'appellé *Sinus total*, sur lequel se mesurent tous les autres. D'où l'on voit que son égal AD doit aussi être pris pour Sinus total, dont DE soit un des Sinus partiaux. De sorte que,

COROLLAIRE I.

Dans le triangle rectangle AED, en prenant AD pour le Sinus total, ou de l'angle droit E, l'on aura DE pour le Sinus de l'angle DAC ou DAF; & par la même raison l'on aura aussi AE pour le Sinus de l'angle ADE.

COROLLAIRE II.

On voit aussi que deux angles DAC, DAF, complemens l'un de l'autre a deux droits, c'est-à-dire, dont la somme vaut deux droits, ont chacun le même Sinus DE, en prenant toûjours AD pour le Sinus total.

DEFINITION X.

Si à l'extrêmité C du rayon AC, on mene une perpendiculaire, ou tangente CM, laquelle soit rencontrée en G par l'autre côté AD prolongé de l'angle CAD; la partie CG de cette perpendiculaire, est appellée *Tangente* de cet angle CAD, ou de l'arc CD. De même si a l'extrêmité F du rayon AF, on mene une perpendiculaire FN, laquelle soit rencontrée en H par l'autre côté DA prolongé de l'angle FAD complement du premier CAD a deux droits; la partie FH de cette seconde perpendiculaire sera aussi appellée *Tangente* de ce complement FAD ou de l'arc FD.

COROLLAIRE.

Les lignes CG, FH, étant égales entr'elles, de même que le sont les autres côtez AC, AF, des triangles ACG, AFH (*constr.*) semblables on voit que les tangentes des deux

deux angles complemens l'un de l'autre à deux droits, sont toûjours égales entr'elles, de même que leurs sinus le sont toûjours (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) entr'eux ; c'est-à-dire, que deux angles complemens l'un de l'autre à deux droits, ont toûjours la même tangente & le même sinus.

Il en est de même de AG, AH, qu'on appelle leurs *Secantes*.

DEFINITION XI.

Lorsqu'un angle à force de devenir aigu, s'évanouit en parallelisme de ses côtez entr'eux, soit qu'ils soient ou non confondus en un, on l'appelle *infiniment aigu* ; & lorsqu'à force de devenir obtus, ses deux côtez deviennent (comme bout à bout) en ligne droite, on l'appelle *infiniment obtus*.

COROLLAIRE.

On voit de-là qu'un angle infiniment aigu en a toûjours un infiniment obtus pour complement à deux droits ; & reciproquement.

LEMME IV.

A l'instant qu'un angle rectiligne s'évanouit à force de diminuer, ses côtez deviennent paralleles entr'eux.

DEMONSTRATION.

Car le parallelisme de ces deux lignes entr'elles (dont la réduction de ces mêmes lignes en une, est une espece) naissant de l'évanouissement du dernier, c'est-à-dire, du plus petit des angles qu'elles puissent faire entre-elles, la fin de ce dernier angle doit être le commencement de ce parallelisme, & comme le terme où ils se touchent, pour ainsi dire ; par consequent à l'instant de cet évanouissement il doit y avoir tout à la fois entre ces deux lignes & angle finissant, & parallelisme naissant. Donc à l'instant que leur angle s'évanouit à force de diminuer, elles deviennent paralleles entr'elles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Cet angle finiſſant ainſi (*Définit.* 11.) par l'infiniment aigu, il s'enſuit que deux lignes droites arrivées à ce terme, le ſont auſſi à leur parallelíſme, & conſequemment que lorſqu'elles ne font plus entr'elles qu'un angle infiniment aigu, elles peuvent à la rigueur paſſer pour paralleles, & reciproquement puiſqu'elles n'ont plus de chemin à faire pour paſſer de cet angle au parallelíſme.

COROLLAIRE II.

Si de deux points fixes partent deux lignes droites mobiles chacune autour du ſien, leſquelles faſſent entr'elles un angle qui devienne aigu de plus en plus par l'éloignement continuel de ſon ſommet ; ces deux lignes ſeront (*Corol.* 1.) paralleles entr'elles lorſque ce ſommet ſe trouvera infiniment éloigné de leurs points fixes, l'angle qu'elles feront entr'elles, ſe trouvant alors infiniment aigu.

COROLLAIRE III.

Si au contraire d'un même point fixe partent deux lignes droites dont l'angle compris entr'elles, devienne enfin infiniment aigu ; alors ces deux lignes devenuës (*Corol.* 1.) paralleles entr'elles, paſſant (*Hyp.*) par un même point, ſe confondront en une ſeule & même ligne droite, & la baſe de l'angle fini qu'elles faiſoient auparavant entr'elles, ſe trouvera alors anéantie ou réduite en un point, ſi ces deux lignes étoient égales, ou égale à leur difference pareillement confonduë avec elles, ſi elles étoient inégales ; reciproquement ces deux lignes ſeront égales ou inégales entr'elles, ſelon que leur angle infiniment aigu rendra cette baſe nulle ou non.

[library stamp]

COROLLAIRE IV.

Deux lignes droites qui font entr'elles un angle infiniment aigu d'un côté, en faiſant toûjours un (*Corol. Déf.* 11)



infiniment obtus de l'autre ; il suit que puisqu'elles se disposent parallelement (*Corol.* 2.) ou se confondent en une (*Corol.* 3.) du côté de l'angle infiniment aigu, elles doivent se disposer en sens directement contraires parallelement, ou en ligne droite bout à bout du côté de l'angle infiniment obtus.

LEMME VII.

De quelque maniere que la ligne droite AD divise l'angle rectiligne BAC, le sinus de cet angle total BAC se trouvera égal à la somme des sinus des angles partiaux BAD, BAC, lorsque ce même angle total sera infiniment aigu. FIG. 15.

DEMONSTRATION.

Du centre A, & d'un rayon quelconque AE, soit l'arc de cercle EFO, qui rencontre AD, AC, en F, O ; des points E, F, soient EH, FK, perpendiculaires en H, K, sur AC, la premiere EH rencontrant AD en L, & du point E la droite EG perpendiculaire aussi en G sur AD. Cela fait, si l'on prend AE, ou son égale AF pour sinus total, l'on aura (*Def.* 9. *Corol.* 1.) EH, FK, EG, pour les sinus des angles BAC, DAC, BAD.

Je dis donc que lorsque l'angle total BAC sera devenu infiniment petit, son sinus EH se trouvera égal à la somme des sinus EG, FK, des angles partiaux BAD, DAC ; c'est-à-dire, qu'alors on aura EH=EG+FK.

Pour le voir, il n'y a qu'à considerer que lorsque l'angle total BAC sera infiniment aigu, les deux partiaux BAD, DAC, le seront aussi ; & consequemment (*Corol.* 1. *du Lem.* 6.) que les trois droites BA, DA, CA, seront alors paralleles entr'elles de l'une ou de l'autre des deux manieres marquées dans les Corol. 2. 3. du Lem. 6. Donc les angles (*Hyp.*) droits en H, K, G, rendront alors EH, FK, EG, perpendiculaires à chacune de ces trois paralleles ; ce qui confondant EL avec EG, & LH avec FK, donne alors EG+FK=EL+LH=EH. Donc le sinus EH de l'angle total BAC se trouve alors égal à la somme

des sinus EG, FK, des angles partiaux BAD, DAC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc aussi pour lors le sinus de celui qu'on voudra de ces deux angles partiaux BAD, DAC, sera égal à la difference dont le sinus de l'autre sera surpassé par le sinus EH de l'angle total BAC; c'est-à-dire, qu'alors EG=EH—FK, & FK=EH—EG.

COROLLAIRE II.

Or en prolongeant DA, CA, vers M, N, l'on aura aussi (*Déf. 9. Corol. 2.*) EG, EM, FN, pour les sinus des angles BAM, BAN, MAN; & lorsque l'angle BAC sera infiniment aigu, son complement (à deux droits) BAM sera infiniment obtus, & MAN infiniment aigu. Donc lorsqu'un angle BAM infiniment obtus sera divisé en deux, dont un MAN soit infiniment aigu, le sinus de l'angle total BAM sera toûjours égal à la difference dont le sinus du plus grand BAN des partiaux surpassera le sinus du plus petit MAN; puisqu'alors (*Corol. 1.*) l'on aura toûjours EG=EH—FK.

Quoique dans le Corol. 2. les angles BAM, BAN, infiniment obtus, soient infiniment grands par rapport à l'infiniment aigu MAN, l'étant aussi par rapport à leurs complemens infiniment aigus BAD, BAC, qui ont (Déf. 9. Corol. 2.) *les mêmes sinus qu'eux; leurs sinus EG, EH, seront infiniment petits, & de même genre que celui EK de l'angle MAN; & consequemment EG=EH—FK sera ici d'une valeur réelle, quoiqu'infiniment petite. C'est pour rendre de la plus grande universalité possible les propositions & les Corollaires des sections suivantes, que nous en venons ici jusqu'aux infiniment petits, dont l'idée seule suffira sans en sçavoir le calcul: idée à la portée de tout le monde, avec un peu d'attention. Par* infiniment petit, *on n'entend qu'une grandeur moindre que quelque assignable que ce soit, laquelle, au langage des Anciens, s'appelleroit* quantitas minor quavis data.

SCHOLIE.

Les angles en H, K, G, étant (*Hyp.*) droits, & le Corol. 1. du Lem. 6. faisant voir que lorsque l'angle BAC est infiniment aigu, & consequemment aussi les angles BAD, DAC; les trois lignes BA, DA, CA, sont paralleles entr'elles de quelqu'une des deux manieres marquées dans les Corol. 2. 3. de ce Lem. 6. On vient de conclure, suivant la doctrine d'Euclide, que chacune des lignes EH, FK, EG, est perpendiculaire à chacune de ces trois paralleles; & consequemment qu'alors LH est égale à FK, aussi-bien que EG à EL, qui pour lors se confond avec elle comme LH avec FK. Pour voir tout cela, il faut considerer que lorsque les droites BA, CA, deviennent paralleles entr'elles, tout ce qu'on en peut imaginer d'autres par A dans l'angle BAC, le deviennent aussi entr'elles (*Lem. 6. Corol. 1.*) & à ces deux-là; & consequemment que l'arc EFO perpendiculaire à toutes, dégenere pour lors en une ligne droite, qui leur est aussi perpendiculaire, & qui passant par E, F, de même que EH, EG, FK, perpendiculaire aussi pour lors à ces paralleles AC, AD, AB, doit se confondre avec celles-là, desquelles EG se trouve pour lors au bout de FK en ligne droite, avec laquelle EH se confond alors sur cet arc EFO redressé en une ligne EH=EG+FK, conformément au present Lem. 7.

LEMME VIII.

De quelque point E de la diagonale AD d'un parallelogramme quelconque ABDC, qu'on mene deux perpendiculaires EF, EG, sur ses côtez AB, AC, prolongez avec cette diagonale où besoin sera; ces perpendiculaires seront toûjours entr'elles en raison reciproque de ces côtez, c'est-à-dire, EF. EG :: AC. AB. FIG. 17.



DEMONSTRATION.

Du point D soient DH, DK, perpendiculaires aussi sur les côtez AB, AC, du même parallelogramme ABDC. Le parallelisme de ses deux autres côtez DC, DB, avec ces deux-là, rendra les angles HBD=HAK=KCD, outre les angles EAF=DAH, & EAG=DAK. Donc les angles en H, K, F, G, étant (*Hyp.*) droits, les triangles DBH, DCK, seront semblables entr'eux, de même que les triangles EFA, DHA, & que les triangles EGA, DKA. Par consequent DH. DK :: DB. DC :: AC. AB. Et EF. DH :: EA. DA :: EG. DK. Ou (en permutant) EF. EG :: DH. DK. Donc aussi EF. EG :: AC. AB. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Mais si l'on prend AE pour le sinus total, l'on aura (*Déf.* 9. *Corol.* 1.) EF, EG, pour les sinus des angles EAF, EAG, ou de leurs égaux ou complemens DAB, DAC. Donc les côtez AC, AB, du parallelogramme ABDC sont entr'eux comme les sinus des angles DAB, DAC, c'est-à-dire, en raison reciproque des sinus des angles que ces deux côtez font avec la diagonale AD: de sorte que les angles DAB, ADC, étant égaux entr'eux, de même que les côtez AB, DC, les côtez AC, DC, du triangle ACD, seront toûjours entr'eux comme les sinus des angles ADC, DAC, qui leur sont opposez dans ce triangle.

COROLLAIRE II.

Par la même raison, si l'on acheve le parallelogramme ADCM, dont AC soit la diagonale, l'on aura AM à AD comme le sinus de l'angle CAD au sinus de l'angle CAM; c'est-à-dire (à cause de AM=DC, & l'angle CAM=ACD) les côtez DC, AD, du triangle ACD, entr'eux comme les sinus des angles CAD, ACD, qui leur sont opposez dans ce triangle. Donc ayant déja (*Corol.* 1.)

les côtez AC, AD, de ce même triangle ACD entr'eux comme les sinus des angles ADC, DAC ; l'on aura les trois côtez AC, DC, AD, de ce triangle quelconque ACD entr'eux comme les sinus des angles ADC, DAC, DCA, qui leur sont opposez ; & ainsi de tous les autres triangles rectilignes à l'infini, celui-ci ACD moitié d'un parallelogramme (*Hyp.*) quelconque ABDC, étant aussi quelconque.

COROLLAIRE III.

Mais le parallelogramme ABDC donne DC=AB ; l'angle ADC=DAB, & le sinus de l'angle DCA ; égal (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) à celui de son complement BAC à deux droits. Donc (*Corol.* 2.) AC, AB, AD, sont entr'eux comme les sinus des angles, DAB, DAC, BAC.

COROLLAIRE IV.

Or le parallelogramme ABDC rend aussi les angles DAB=ADC, DAC=ADB, BAC=BDC, & leurs côtez AC=BD, AB=CD. Donc (*Corol.* 3.) l'on aura de même toûjours BD, CD, AD, entr'eux comme le sinus des angles ADC, ADB, BDC.

COROLLAIRE V.

Donc les sinus des angles ADC, ADB, étant (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) les mêmes que ceux de leurs complemens CDO, BDO, l'on aura aussi toûjours (*Corol.* 4.) BD, CD, AD, en raison des sinus des angles CDO, BDO, BDC, au travers desquels ces lignes prolongées passeroient.

COROLLAIRE VI.

Il suit encore du Corol. 4. qu'un angle rectiligne quelconque BDC étant divisé à volonté par une droite DA, plus cet angle total BDC sera petit, plus sera grande la raison de son sinus à chaque sinus des angles partiaux ADB, ADC, & plus au contraire ce même angle total BDC sera grand, plus cette raison sera petite : car si sur

la diagonale AD prise de grandeur arbitraire, l'on imagine un parallelogramme ABDC, dont les côtez DB, DC, soient sur ceux de l'angle supposé BDC; on verra que plus cet angle diminuera, plus cette diagonale AD augmentera, les côtez DB, DC, du parallelogramme ABDC demeurant toûjours les mêmes, & plus au contraire cet angle BDC augmentera, plus cette diagonale AD diminuera. Donc dans tous ces changemens du parallelogramme ABDC, cette diagonale AD se trouvant toûjours (*Corol.* 4.) à ses côtez BD, DC, comme le sinus de l'angle total BDC sera aux sinus des angles partiaux ADC, ADB.

1°. Plus cet angle total BDC diminuera, plus au contraire le rapport de son sinus à chacun des sinus de deux angles partiaux ADC, ADB, augmentera jusqu'à se trouver le plus grand qu'il puisse être, lorsque cet angle BDC sera infiniment aigu.

2°. Reciproquement plus ce même angle total BDC augmentera, plus au contraire le rapport de son sinus à chacun des sinus des deux angles partiaux ADC, ADB, diminuera, jusqu'à se trouver le plus petit qu'il puisse être lorsque cet angle BDC sera infiniment obtus.

COROLLAIRE. VII.

Il suit de plus du Corol. 4. qu'en quelque rapport fini qu'un angle rectiligne fini quelconque BDC, soit divisé par la droite AD, chacun des sinus de cet angle total, & des deux partiaux ADC, ADB, sera toûjours moindre que la somme des deux autres sinus. Car si sur AD de longueur prise à volonté, & de côtez pris sur DC, DB, on fait (comme dans le précedent Corol. 6.) le parallelogramme ABDC; le Corol. 4. fait voir que les sinus de ces trois angles BDC, ADC, ADB, sont entr'eux comme AD, BD, CD, ou (à cause de AC=BD) comme les trois côtez AD, AC, CD, du triangle ACD. Or on sçait que chacun de ces trois côtez est moindre que la somme des deux autres. Donc aussi chacun des sinus des

trois

trois angles finis BDC, ADC, ADB, eſt moindre que la ſomme des deux autres ſinus.

COROLLAIRE VIII.

Trois lignes droites DE, DC, DA, étant menées d'un même point D ſur un même plan, faiſant entr'elles des angles quelconques, ſi par tels points H, L, K, qu'on voudra de ces trois lignes prolongées, ou non, on leur fait autant de perpendiculaires EF, FG, EG; il ſuit encore du Corol. 2. que ces côtez EF, FG, EG, du triangle EFG, qui en réſultera, ſeront toûjours entr'eux comme les ſinus des angles ADC, ADB, BDC, à travers deſquels, ou des complemens deſquels, leurs perpendiculaires DB, DC, DA, prolongées paſſeroient. FIG. 18. 19. 20.

Car ſi l'on imagine PQ parallele à BD, avec laquelle, & avec AD prolongée (s'il eſt neceſſaire) elle faſſe le triangle PQD, & que l'on prolonge BD, CD, juſqu'à la rencontre de EG (prolongée) en MN: les triangles EHM, DKM, rectangles (*Hyp.*) en H, K, ayant de plus les angles EMH=DMK, ont auſſi leurs troiſiémes angles MEH=MDK: de même les triangles GLN, DKN, rectangles (*Hyp.*) en L, K, ayant auſſi de plus les angles GNL=DNK, ont pareillement leurs troiſiémes angles NGL=NDK. Mais les angles MEH=GEF, MDK=BDP=DPQ, à cauſe de PQ ſuppoſée parallele à BD; & les angles NGL=EGF, NDK=PDQ. Donc les angles GEF=DPQ, EGF=PDQ, dans les triangles EFG, PQD, leſquels en conſequence ont leurs troiſiémes angles en F, Q, pareillement égaux entr'eux: ce qui rend ces deux triangles ſemblables entr'eux; & par conſequent les trois côtez EF, FG, EG, du premier EFG, proportionnels aux trois côtez PQ, QD, PD, du ſecond PQD de ces deux triangles; c'eſt-à-dire, EF. FG. EG :: PQ. QD. PD.

Or ces trois derniers côtez PQ, QD, PD, du triangle PQD, ſont entr'eux (*Corol.*) comme les ſinus des angles PDQ, DPQ, DQP, ou (*Déf. 9. Corol. 2.*) ou de leurs

complemens ADC, ADB, BDC. Donc auſſi les côtez EF, FG, EG, du triangle EFG, ſont entr'eux comme les ſinus des angles ADC, ADB, BDC, à travers deſquels, ou des complémens deſquels leurs perpendiculaires (*Hyp.*) DB, DC, DA, prolongées paſſeroient, ainſi qu'on le voit avancé au commencement de ce Corollaire-ci.

COROLLAIRE IX.

Il ſuit auſſi du preſent Lem. 8. que de quelque point E d'un des côtez AD d'un parallelogramme quelconque ADCM, qu'on mene des perpendiculaires EG, EF, ſur la diagonale AC, & ſur ſon autre côté AM; cet autre côté AM, & cette diagonale AC feront toûjours entre-eux en raiſon reciproque de ces deux perpendiculaires EG, EF, ſçavoir, EF. EG :: AC. AM. Puiſque ce Lem. 8. donne toûjours EF. EG :: DH. DK :: DB. DC :: AC. AM.

Cela peut auſſi ſe démontrer immediatement de cela ſeul que EF. EG :: DH. DK :: DB. DC :: AC. AM.

On pourra tirer de ceci des conſequences ſemblables à celles qu'on vient de tirer du preſent Lem. 8. cela eſt preſentement trop facile pour s'y arrêter.

COROLLAIRE X.

Il ſuit enfin de ce dernier Corol. 9. & du preſent Lem. 8. que de quelque point, ſoit de la diagonale, ou d'un des côtez d'un parallelogramme quelconque, qu'on mene des perpendiculaires ſur les deux autres de ces trois lignes prolongées, ou non; ces deux perpendiculaires feront toûjours entr'elles en raiſon reciproque des deux côtez, ou d'un d'eux, & de la diagonale du parallelogramme propoſé quelconque, ſur leſquelles elles ſont à angles droits.

LEMME IX.

I. *Lorſqu'un angle d'un parallelogramme quelconque devient infiniment aigu, la diagonale qui paſſe par cet angle, devient égale à la ſomme de ſes côtez.*

II. *Au contraire lorsque cet angle devient infiniment obtus, cette diagonale ne se trouve plus égale qu'à la difference de ces mêmes côtez.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Suivant le Corol. 3. du Lem. 8. la diagonale AD d'un parallelogramme quelconque ABDC est toûjours aux côtez AB, AC, de ce parallelogramme comme le sinus de l'angle total BAC est aux sinus des angles partiaux DAC, DAB. Mais lorsque cet angle total BAC devient infiniment aigu, son sinus (*Lem.* 7.) devient égal à la somme des sinus des angles partiaux DAC, DAB. Donc aussi pour lors la diagonale AD devient égale à la somme des côtez AB, AC. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.* FIG. 21.

PART. II. Imaginons le parallelogramme ABDC fait de quatre régles AB, BD, AC, CD, mobiles autour de quatre clous qui les retiennent ensemble en A, B, D, C, & qu'on l'écrase en pressant les deux points ou clous B, C, l'un vers l'autre jusqu'à sa diagonale AD, qui s'alongera ainsi à mesure que l'autre BC s'acourcira, les côtez du parallelogramme ainsi varié demeurant toûjours les mêmes. On verra qu'à mesure que ses angles ABD, ACD, deviendront ainsi plus obtus, les côtez DB, DC, avanceront vers AD en décrivant du centre D les arcs circulaires BQ, CP, jusqu'à ce que les sommets B, C, de ces deux angles soient arrivez en Q, P, & ces côtez DB, DC, en DQ, DP, sur cette diagonale AD, dont l'allongement joint au racourcissement de l'autre BC, permettra aussi aux deux autres côtez AD, AC, d'arriver pour lors sur elle en AQ, AP; auquel instant des angles ABD, ACD, ainsi devenus infiniment obtus, la diagonale BC sera en PQ. Donc alors $BC = PQ = DP - DQ = DC - DB = AB - AC$. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

COROLLAIRE I.

Si l'on ſuppoſe preſentement qu'un corps ou point A ſoit pouſſé ou tiré par deux puiſſances à la fois, dirigées ſuivant les côtez AB, AC, du parallelogramme ABDC, leſquels leur ſoient proportionnels ; les art. 1. 2. du Corol. 1. du Lem. 3. faiſant voir que ce corps ou point A devroit alors tendre de A vers D ſuivant la diagonale AD de ce parallelogramme, & d'une force qui ſeroit à chacune de ces puiſſances comme cette diagonale à chacun des côtez AB, AC, qui leur ſont (*Hyp.*) proportionnels. La démonſtration de la Part. 1. de ce Lemme-ci fait conſequemment voir que ſi l'angle BAC étoit infiniment aigu, la force du corps ou point A ſuivant AD, réſultante du concours des puiſſances dirigées ſuivant AB, AC, ſeroit alors égale à la ſomme de ces deux puiſſances, & dirigée (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) parallelement à leurs directions alors paralleles entr'elles, & en même ſens que ces puiſſances qui tendroient alors toutes deux de A vers D, & conſpireroient ainſi toutes entieres à mouvoir en ce ſens ce corps ou point A de la ſomme entiere de leurs forces.

COROLLAIRE II.

Si B étoit le point ou le corps pouſſé ou tiré à la fois par les deux puiſſances précedentes dirigées preſentement ſuivant les côtez BA, BD, du parallelogramme ABDC, qui leur ſont (*Hyp.*) proportionnels ; les art. 1. 2. du Corol. 1. du Lem. 3. faiſant encore voir que ce corps ou point B tendroit alors de B vers C, ſuivant l'autre diagonale BC de ce parallelogramme, & d'une force qui ſeroit à chacune de ces puiſſances comme cette diagonale BC à chacun des côtez BA, BD, de ce même parallelogramme ABDC ; la démonſtration de la Part. 2. de ce Lemme-ci fait conſequemment voir auſſi (au contraire de la démonſtration de la Part. 1.) que ſi l'angle ABD étoit infiniment obtus, la force du corps ou point B ſuivant BC, réſultante du concours de ces deux puiſſances,

ou plutôt restante de la directe contrarieté qui (*Lem.* 6. *Corol.* 4.) seroit alors entr'elles, ne seroit plus alors qu'égale à la difference de ces deux puissances, & dirigée (*Lem.* 6. *Corol.* 4.) parallelement à leurs directions alors paralleles entr'elles ou directement opposées, & en même sens que la plus forte d'entr'elles, à qui seule leur directe contrarieté ne laisseroit que son excès sur l'autre pour agir sur ce corps ou point B.

Ces deux Corol. 1. 2. *s'accordent parfaitement avec les loix ordinaires du choc des corps, suivant lesquelles deux donnant à la fois sur un en même sens, le pousseroient en ce sens de la somme de toutes les forces qu'ils lui communiqueroient separément, conformément au Corol.* 1. *Et deux donnant à la fois sur un en sens directement contraires, ne le pousseroient que de la difference de ces deux forces dans le sens de la plus grande, conformément au Corol.* 2.

COROLLAIRE III.

Si l'on imagine, comme dans la démonstrat. de la Part. 2. les côtez BA, BD, du triangle ABD, mobiles autour des points fixes A, D, de la base AD, laquelle s'allonge à mesure qu'en écrasant ce triangle vers elle, on en approche l'angle B; cette démonstration de la Part. 2. fait voir que lorsque ce sommet B sera sur cette base allongée AD, elle sera égale à la somme des deux autres côtez BA, BD, de ce triangle ABD, & chacun de ces côtez égal à la difference dont l'autre est alors surpassé par cette base: & comme (*Déf.* 11.) l'angle ABD du triangle de ce nom, se trouve alors infiniment obtus, & chacun des deux autres BAD, BDA, infiniment aigu; il s'ensuit que dans un triangle réduit à un angle infiniment obtus, & à deux infiniment aigus,

1°. Que le côté opposé à l'angle infiniment obtus, vaut la somme des deux autres côtez.

2°. Que le côté opposé à un angle infiniment aigu, vaut la difference des deux autres côtez.

SCHOLIE.

I. Dans la démonſtrat. de la Part. 2. on vient de voir que lorſque deux angles oppoſez ABD, ACD, du parallelogramme ABDC deviennent infiniment obtus par l'arrivée de leurs ſommets B, C, ſur la diagonale AD; cette diagonale AD, ſur laquelle les deux côtez AB, BD, ſe couchent alors en Q, de même que les deux autres AC, CD, en P, ſe trouve alors égale à la ſomme de ces côtez pris ainſi deux à deux, c'eſt-à-dire, qu'alors AD=AB+BD=AC+CD. Or lorſque l'angle ABD ſe trouve infiniment obtus, ſon complement BAC eſt (*Corol.* 11.) infiniment aigu. Donc lorſqu'un angle BAC d'un parallelogramme quelconque ABDC devient infiniment aigu par l'arrivée de ſes côtez AB, AC, ſur la diagonale AD, cette diagonale ſe trouve toûjours alors égale à la ſomme de ces deux mêmes côtez. Ce qui eſt encore une nouvelle preuve très-ſenſible de la Part. 1. de ce Lemme-ci, pour le cas où les ſommets B, C, des angles ABD, ACD, ſont mobiles.

II. Pour avoir auſſi de cette Part. 1. une démonſtration ſenſible autant que l'incompréhenſibilité de l'infini le peut être, lorſque l'angle BAC devient infiniment aigu, les deux points B, C, demeurant fixes; imaginons le parallelogramme ABDC fait des parties BA, BD, CA, CD, de quatre régles indéfinies BE, BG, CF, CH, mobiles autour de ces points fixes B, C, & qui dans leur mouvement autour de ces deux points, ſe coupent toûjours en deux quelconques A, D, de la droite infinie MN, fixe à égales diſtances des points auſſi fixes B, C. On verra qu'à meſure que ces points de concours A, D, s'éloigneront l'un de l'autre le long de cette droite MN, les angles oppoſez BAC, BDC, deviendront aigus de plus en plus, & les oppoſez ABD, ACD, obtus de plus en plus; & que lorſque ces deux points de concours A, D, ſeront infiniment éloignez l'un de l'autre, & des points fixes B, C, les angles BAC, BDC, ſeront infini-

ment aigus, & les deux autres (*Corol. de la Déf.* 11.) ABD, ADC, infiniment obtus. Or si du centre D, & des rayons DB, DC, on a conçû deux arcs circulaires BQ, CP, variables comme leurs rayons par l'éloignement continuel de leur centre D, on verra qu'à mesure que ce centre D s'éloigne, comme le point A, des points fixes B, C, ces deux arcs deviennent moins courbes de plus en plus, jusqu'à devenir lignes droites perpendiculaires à MN, & aux deux régles de chacun des points B, C, bout à bout en lignes droites paralleles à MN; lorsque les points A, D, sont infiniment éloignez l'un de l'autre, & des points fixes B, C, & que les lignes PA, PD, CA, CD, QA, QD, BA, BD, ainsi changées en infinies PM, PN, CF, CH, QM, QN, BE, BG, paralleles entr'elles, seront pour lors PA=PM=CF=CA; PD=PN=CH=CD, QA=QM=BF=BA, & QD=QN=BG=BD. Donc alors la diagonale infinie AD (PA+PD) =CA +CD, & AD (QA+QD) =BA+BD; c'est-à-dire, dans ce cas-ci des points fixes B, C, comme dans celui (*art.* 1.) de ces deux points mobiles, que la diagonale AD d'un parallelogramme quelconque ABDC est toûjours égale à la somme de ses côtez CA, CD, ou BA, BD, lorsque l'angle BAC, ou BDC en est aigu.

III. Les angles ABD, ACD du parallelogramme ABDC, devenant obtus comme dans le précedent art. 2. par l'écartement vers M, N, de leurs côtez autour de leurs sommets fixes B, C; on voit que la diagonale BC ne change point pendant que l'autre diagonale AD, & tous les côtez de ce parallelogramme changent comme dans cet art. 2. jusqu'à devenir infinis par cet écartement fait jusqu'au parallelisme de ces lignes entr'elles. D'où l'on voit que ce cas des angles ABD, ACD, devenus infiniment obtus par un tel mouvement de leurs côtez autour de leurs sommets fixes B, C, n'est point compris dans la Part. 2. de ce Lemme-ci; & qu'ainsi la démonstration qu'on a donnée ci-dessus de cette Part. 2. en comprend toute l'étendue.

Quant à la part. 1. elle comprend les deux cas des sommets B, C, fixes ou mobiles des angles ABD, ACD, & outre la démonstration qu'on en a donnée d'abord dans toute cette étendue, les deux précedens art. 1. 2. en fournissent encore une nouvelle plus sensible de la même étendue.

LEMME X.

FIG. 22. 23. 24. 25. 26. *Soit un parallelogramme quelconque GICE, avec une ligne droite HP, posée comme l'on voudra par rapport à lui, dans le même ou dans differens plans, il n'importe. Si des quatre angles ou pointes G, I, C, E, de ce parallelogramme on mene à volonté quatre plans exprimez en profil par GL, IP, CH, EV, tous paralleles entr'eux; & que de ces quatre pointes jusqu'à HP, on tire le long de ces plans autant de lignes droites GL, IP, CH, EV, lesquelles rencontrent HP en L, P, H, V, de quelque maniere que ce soit: je dis que la partie de celle-ci, par exemple, HL, comprise entre deux GL, CH, de celles-là, lesquelles partent des points GC, diagonalement opposez, est toûjours égale à la somme de ses autres parties HV, HP, lorsque les points V, P, se trouvent du même côté de H, comme dans les Fig. 21. 22. ou à la difference de ces mêmes parties HV, HP, lorsque ces points V, P, se trouvent de differens côtez de H, comme dans les Fig. 23. 24. 25. c'est-à-dire, $HL = HV + HP$, dans le cas des Fig. 21. 22. & $HL = HV - HP$, comme dans celui des Fig. 23. 24. ou $HL = HP - HV$, comme dans la Fig. 25.*

DEMONSTRATION.

Menez les diagonales IE, GC, qui se coupent chacune par la moitié en K; & après avoir conduit par ce point K un plan encore parallele à ceux qu'on a supposé l'être par les pointes du parallelogramme GICE, faites tomber de ces quatre pointes ou angles G, I, C, E, quatre lignes GR, IM, CS, EN, toutes paralleleles à HP, & qui rencontrent ce dernier plan en R, M, S, N. Enfin du point Q où ce dernier plan rencontre HP, menez QK, QR, QM, QS, QN.

Cela

Cela fait, soit que ces cinq lignes en fassent plusieurs differentes, soit qu'elles se confondent en une seule, il est clair que puisque GR, IM, CS, EN, HP, sont toutes (*constr.*) paralleles entr'elles.

1°. IM & PQ sont dans un même plan avec PI & QM; ainsi puisque PI & QM se trouvent dans des plans (*Hyp.*) paralleles entr'eux, elles seront aussi paralleles entr'elles; & par consequent MP sera un parallelogramme. On prouvera de même que RL, SH, & VN, sont autant de parallelogrammes. Donc IM=PQ, GR=LQ, CS=HQ, & EN=VQ.

2°. De ce que IM, EN, sont (*constr.*) paralleles entr'elles, il suit aussi que les angles MIK, NEK, sont égaux entr'eux, & que ces deux lignes sont dans un même plan avec IE. Par consequent si l'on mene KM, KN, ces deux lignes-ci seront aussi dans ce même plan IMEN; ainsi puisqu'elles sont encore (*constr.*) dans un autre plan qui passe par KQ, elles seront la commune section de ces deux plans; & par consequent elles ne font ensemble qu'une même ligne droite. Ce qui donnant encore les angles IKM, EKN, égaux entr'eux, il suit manifestement que les triangles IMK, ENK, sont semblables, & que puisque IK=KE, l'on aura aussi IM=EN. On prouvera de même que les triangles GKR, CKS, sont semblables entr'eux, & que puisque GK=CK, l'on aura aussi GR=CS.

Or on vient de voir (*constr.*) que IM=PQ, EN=VQ, GR=LQ, CS=HQ. Donc (*nomb.* 2.) PQ=VQ, & LQ =HQ. Donc aussi LP=HV. Donc enfin HL=HV+HP dans le cas des Fig. 22. 23. où V, P, se trouvent du même côté de H; & dans celui où V, P, se trouvent de differens côtez de H, l'on aura HL=HV−HP comme dans les Fig. 24. 25. ou HL=HP−HV, comme dans la Fig. 26. *Ce qu'il falloit démontrer.*

S'il se trouve des Commençans qui, embarrassez par la multitude des Fig. 21. 22. 23. 24. 25. ausquelles cette démonstration convient, ayent de la peine à l'appliquer à tou-

tes à la fois ; ils pourront d'abord l'appliquer à chacune separément, en les prenant l'une après l'autre à volonté. Après cela ils verront sans peine que cette démonstration convient également à toutes ces cinq Figures, & même à plusieurs autres qu'ils imagineront aisément alors, & que j'omets tant pour leur en laisser le plaisir, que pour ne pas multiplier inutilement le nombre de celles-ci. Ils pourront en user de même dans tout ce qu'ils trouveront ici de propositions à plusieurs cas ou Figures.

COROLLAIRE I.

FIG. 27. Soit presentement par A dans des plans quelconques tant de parallelogrammes aussi quelconques qu'on voudra, dont le premier soit ABCD, de qui la diagonale AD soit un des côtez du second ADLM, de qui la diagonale AL soit aussi un des côtez du troisiéme ALPN, de qui la diagonale AP soit pareillement un des côtez du quatriéme, & ainsi à l'infini. Des extrêmitez C, B, M, N, &c. des côtez non diagonaux de ces parallelogrammes soient autant de plans paralleles, & sur eux autant de droites CF, BH, MG, NE, &c. qui rencontrent sous quelque angle que ce soit en F, H, G, E, &c. la diagonale du dernier de ces parallelogrammes, c'est-à-dire, ici la diagonale AP du parallelogramme ALPN, prolongée vers O, E, il suit du present Lem. 10. que cette derniere diagonale $AP = AF + AG + AH - AE$.

Car suivant ce Lemme, si des extrêmitez D, L, &c. des côtez diagonaux AD, AL, &c. des parallelogrammes précedens, l'on mene aussi des plans paralleles aux paralleles précedens, & sur lesquels soient les droites DV, LX, &c. lesquelles rencontrent en V, X, &c. la derniere diagonale AP prolongée, dont AD represente ici la droite HP des précedentes Fig. 22. 23. 24. 25. 26. Le premier parallelogramme ACBD donnera $AV = AF + AH$; le second ADLM donnera $AX = AV + AG$, & consequemment $AX = AF + AH + AG$; le troisiéme ALPN donnera $AP = AX - AE$, & consequemment

AP=AF+AH+AG—AE, ainſi qu'on le vient d'avancer. Ce raiſonnement fait voir qu'il en ſera de même à l'infini, quelque nombre de parallelogrammes quelconques faits comme ci-deſſus, qu'on ſuppoſe dans des plans auſſi quelconques avoir tous le même points A pour un de leurs angles par où paſſent les diagonales dont on vient de parler : la derniere de ces diagonales, telle qu'eſt ici AP, ſera toûjours =AF+AH+AG—AE±, &c. C'eſt-à-dire, égale à la ſomme de ce que les côtez non diagonaux AC, AB, AM, AN, &c. y donneront d'abſciſſes AF, AH, AG, &c. depuis A vers l'autre extrêmité P de cette derniere diagonale, moins la ſomme AE, &c. de ce que ces côtez non diagonaux y en donneront au-delà du point A du côté de E.

COROLLAIRE II.

Toutes choſes demeurant les mêmes, ſuppoſons preſentement que le point A, ou un corps en ce point, ſoit pouſſé ou tiré tout à la fois ſuivant AC, AB, AM, AN, &c. par autant de puiſſances appellées C, B, M, N, &c. leſquelles ſoient entr'elles comme ces lignes correſpondantes. Les Corol. 6. 7. du Lem. 2. & le Corol. 10. du Lem. 3. font voir que l'impreſſion réſultante au point A, du concours de toutes ces puiſſances, eſt toûjours non ſeulement ſuivant la derniere diagonale, qui eſt ici AP celle du dernier ALPN des parallelogrammes précedens ; mais encore d'une force de A vers P, laquelle eſt toûjours à chacune des puiſſances ſuppoſées ſuivant AC, AB, AM, AN, comme cette derniere diagonale AP eſt à chacun de ces côtez proportionnels (*Hyp.*) à ces puiſſances C, B, M, N. Mais le précedent Corol. 1. donne ici AP=AF+AH+AG—AE. Donc auſſi la force du point ou corps A ſuivant AP, réſultante du concours de toutes ces puiſſances-là, eſt toûjours à chacune d'elles, comme AF+AH+AG—AE eſt à chacune de leurs proportionnelles AC, AB, AM, AN, & ainſi à l'infini en quelque nombre qu'elles ſoient.

COROLLAIRE III.

FIG. 28. On voit de-là que si EO est la direction de la force résultante du concours des puissances C, B, M, N, c'est-à-dire, la direction suivant lesquelles ces puissances tendent ensemble à pousser le point ou corps A vers O; & consequemment (*Lem.* 2. *Corol.* 6. & *Lem.* 3. *Corol.* 10.) celle de la derniere diagonale AP des parallelogrammes précedens de la Fig. 27. l'on aura, sans en faire aucun, la longueur de cette derniere diagonale; & consequemment (*Lem.* 2. *Corol.* 7. & *Lem.* 3. *Corol.* 10.) l'on aura aussi la force résultante du concours de ces puissances, suivant cette direction commune AO, si des extrêmitez C, B, M, N, de leurs proportionnelles & directions particulieres AC, AB, AM, AN, on lui mene seulement les paralleles CF, BH, MG, NE, quelqu'angle qu'elles fassent avec elle; puisque le Corol. 1. donne toûjours AF+AG+AH−AE=AP : c'est-à-dire en general, la derniere diagonale de tant de parallelogrammes qu'on voudra, faits comme ci-dessus, toûjours égale à la difference AF+AG+AH−AE±, &c. dont la somme AF+AG+AH+, &c. des abscisses AF, AG, AH, &c. faites sur elle de son côté par rapport à A par des paralleles menées comme ci-dessus, surpasse la somme AE+, &c. de ce qui s'en fait sur elle prolongée de l'autre côté de ce point A, où concourent (*Hyp.*) les puissances supposées C, B, M, N, &c. Et d'où partent leurs proportionnelles & directions particulieres AC, AB, AM, AN, &c. de l'extrêmité desquelles sont menez des plans paralleles quelconques exprimez par CF, BH, MG, NE, &c. qui déterminent ces abscisses AF, AH, AG, AE, &c. par leur rencontre avec EO.

REMARQUE.

I. Il est à remarquer que quoique AF+AG+AH−AE±, & soit toûjours (*Corol.* 1.) égale à la diagonale du dernier des parallelogrammes qu'il auroit fallu faire

comme dans le Corol. 1. pour la trouver, sans se servir des lignes précèdentes CF, BH, MG, NE, &c. menées sur des plans paralleles, par les extrêmitez des proportionnelles AC, AB, AM, AN, &c. aux puissances C, B, M, N, &c. qu'on suppose agir toutes à la fois suivant ces directions particulieres, chacune suivant la sienne, sur le corps ou point A; & qu'ainsi (*Lem.* 2. *Cor.* 7. *& Lem.* 3. *Corol.* 10.) AF+AH+AG−AE±, &c. soit toûjours l'expression de la force résultante du concours de toutes ces puissances suivant leur direction commune AO; les parties correspondantes AF, AH, AG, AE, &c. de cette expression, n'expriment pourtant pas toûjours ce que chacune de ces puissances C, B, M, N, &c. contribue à cette force totale de A vers O suivant AO, c'est-à-dire, ce que chacune d'elles y employe de force pour ou contre, mais seulement lorsque (*Lem.* 3. *part.* 2.) les lignes droites CF, BH, MG, NE, &c. ou les plans paralleles sur lesquels on les suppose, sont perpendiculaires à cette direction commune AO prolongée de part & d'autres : lorsqu'elles le sont, chacune de ces puissances C, B, M, N, &c. est toûjours (*Lem.* 3. *part.* 2.) à ce qu'elle fait d'impression pour ou contre suivant cette direction AO, ou AE, sur le point ou corps A, comme celle de leurs proportionnelles AC, AB, AM, AN, &c. qui l'exprime, est à celle des abscisses AF, AH, AG, AE, &c. qui lui répond. Par exemple, dans ce cas de perpendicularité des lignes CF, BH, MG, NE, &c. sur AO, la puissance C dirigée suivant sa proportionnelle AC, est à ce qu'elle fait d'effort suivant AO : : AC. AF. & ainsi des autres en quelque nombre qu'elles soient, quelques rapports qu'elles ayent entr'elles, & suivant quelques directions qu'elles agissent sur le corps ou point A.

II. De-là il suit encore que AF+AH+AG−AE± &c. =AP pour ce cas des lignes CF, BH, MG, NE, &c. perpendiculaires sur cette ligne AP prise pour la derniere diagonale qui (*Lem.* 2. *Corol.* 7. *& Lem.* 3. *Corol.* 10.) exprime l'effort résultant au corps ou point A du con-

cours des puiſſances appellées ici C, B, M, N, &c. Car puiſque cet effort total ſuivant cette derniere diagonale AP, n'eſt fait que des efforts particuliers de ces puiſſances ſuivant cette ligne, ou plûtôt n'eſt que la ſomme de ce qu'elles en font de A vers P ſuivant cette ligne, moins ce qu'elles en font ſuivant la même ligne en ſens contraire, & que ces efforts particuliers ſont (*Lem.* 3: *part.* 2.) comme les abſciſſes AF, AH, AG, AE, &c. dont les premieres AF, AH, AG, &c. expriment ici ces efforts de A vers P ſuivant AP, & les dernieres AE, &c. ce qui s'en fait ſuivant la même ligne en ſens contraire: il ſuit, dis-je, du précedent art. 1. que ce cas des lignes CF, BH, MG, NE, &c. perpendiculaires à cette ligne AP prolongée de part & d'autre du point A, l'on aura encore cette derniere diagonale AP=AF+AH+AG−AE±, &c. conformément au précedent Corol. 3. dont ceci n'eſt qu'un cas, l'angle que les précedens plans paralleles entr'eux, ou que les lignes CF, BH, MG, NE, &c. menez ſur eux, font avec cette derniere diagonale AP, y étant indéterminé, & tel qu'on voudra, au lieu que cette derniere preuve le ſuppoſe droit.

III. Il eſt auſſi à remarquer que puiſque l'impreſſion réſultante du concours de toutes les puiſſances C, B, M, N, &c. au point ou corps A, le pouſſe (*Hyp.*) ſuivant AO, en ſorte que libre d'ailleurs il ſuivroit cette droite de A vers O; il faut que ce que ces puiſſances font chacune d'effort ſur lui (*Lem.* 3. *part.* 1.) ſuivant chacune des correſpondantes FC, HB, GM, EN, &c. perpendiculaires à AO, pour (*art.* 1.) le détourner de cette ligne AO, ſe trouve en équilibre & détruit, comme l'on voit dans la part. 3. du Lem. 3. par la contrarieté directe de ces efforts collateraux entr'eux; & qu'ainſi ce qui s'en fait de droite à gauche de cette direction commune AO, ſoit toûjours égal à ce qui s'en fait de gauche à droite; & de même de tous les autres côtez diamétralement oppoſez autour de AO. D'où l'on voit que ſi les quatre directions particulieres AC, AB, AM, AN, étoient dans un

même plan deux d'un côté, & deux de l'autre de la direction commune AO; comme elles paroissent ici, l'on y auroit FC+HB=GM+EN; puisque FC, HB, GM, EN, seroient entr'elles (*Lem.* 3. *part.* 1.) comme les efforts des puissances C, B, M, N, en ces deux sens, & que les deux premiers seroient ainsi diamétralement opposez aux deux autres.

DEFINITION XII.

Pour éviter les équivoques dans la suite nous appellerons *puissances libres* celles qui par leur concours d'action sur un corps ou sur un point, le meuvroient effectivement comme dans le principe general, & dans les Lem. 1. 2. 3. Et lorsqu'elles en seront empêchées par quelque obstacle, ou par quelqu'autre puissance qui, égale & directement opposée à leur concours d'action, les arrête toutes en équilibre avec elle sur ce corps ou sur ce point; nous les appellerons toutes puissances forcées ou retenues. Suivant cela en appellant (comme nous ferons toûjours dans la suite) n le nombre des puissances libres, & m celui des forcées, nous aurons toûjours alors $m=n+1$.

LEMME XI.

Soient encore (comme dans le Cor. 1. *du précedent Lem.* 10.) *par le point A dans des plans quelconques tant de parallelogrammes aussi quelconques qu'on voudra, dont le premier soit ACDB, de qui la diagonale AD soit un des côtez du second ADLM, de qui la diagonale AL soit aussi un des côtez du troisiéme ALPN, de qui la diagonale AP soit pareillement un des côtez d'un quatriéme, & ainsi à l'infini. Par les extrêmitez C, B, des côtez AC, AB, du premier ACDB de ces parallelogrammes soit une seconde diagonale CB, qui rencontre la premiere AD en Q; de ce point Q par l'extrêmité M du côté AM du second parallelogramme ADLM, soit QM qui rencontre sa diagonale AL en R; de ce point R par l'extrêmité N du côté AN du troisiéme parallelogramme ALPN, soit RN qui rencontre sa diagonale AP en S, &* FIG. 15.

toûjours de même jusqu'à la derniere, laquelle soit ici AP pourne pas aller à l'infini.

Cela fait, je dis que la partie AS de cette derniere diagonale sera à cette diagonale entiere AP, comme l'unité est au nombre des côtez non diagonaux AC, AB, AM, AN, des parallelogrammes supposez, ou (ce qui revient au même) comme l'unité est au nombre de ces parallelogrammes plus un; c'est-à-dire ici, AS. AP :: 1. 4.

DEMONSTRATION.

Les parallelogrammes ALPN, ADLM, ACDB, donnant NP=AL, ML=AD=2×AQ, les triangles semblables ASR, PSN, & ARQ, LRM, donneront AS. SP :: AR. NP :: AR. AL :: AR : AR+RL :: AQ. AQ+ML :: AQ. AQ+AD :: AQ. AQ+2×AQ :: AQ. 3×AQ :: 1. 3. Donc aussi AS. AS+SP :: 1. 1+3. c'est-à-dire, AS. AP :: 1. 4. Et ainsi dans le dernier de tout ce qu'on peut ajoûter d'autres parallelogrammes à ceux-ci de la maniere précedente : la derniere diagonale s'y trouvera toûjours divisée de la maniere précedente en deux parties, dont la plus proche du point A sera à cette diagonale entiere, comme l'unité sera au nombre des côtez non diagonaux de tous ces parallelogrammes, ou (ce qui revient au même) comme l'unité sera au nombre de ces parallelogrammes plus un. De sorte que si le nombre des côtez non diagonaux étoit $=n$, & que consequemment le nombre de ces parallelogrammes fût $=n-1$, la partie la plus proche de A de la derniere diagonale divisée en deux comme ci-dessus, seroit à cette diagonale entiere :: 1. *n*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

C'est M. Leibnitz qui m'a fait penser à ce Lemme, dont il n'a donné que l'énoncé, avec quelques explications dans le Journal des Sçavans de 1693. pag. 417. L'usage qu'il me parut pouvoir avoir dans mon Projet d'une nouvelle Mécanique *de 1687. me fit en chercher la démonstration, que je trouvai aussi-tôt telle qu'on la voit ici : cet usage paroîtra dans*

COROLLAIRE.

COROLLAIRE I.

Si donc le point A, ou un corps (ſans peſanteur) exprimé par A, étoit pouſſé ou tiré à la fois ſuivant AC, AB, AM, AN, &c. par autant de forces ou puiſſances proportionnelles à ces côtez de parallelogrammes, & dirigées ſuivant ces lignes; non ſeulement il ſeroit pouſſé ou tiré (*Lem.* 3. *Corol.* 10.) par le concours de toutes ces puiſſances enſemble ſuivant la derniere diagonale AP, d'une force qui ſeroit à celles-là comme cette derniere diagonale aux côtez AC, AB, AM, AN, qui leur ſont (*Hyp.*) proportionnels; mais encore cette derniere diagonale AP ſeroit à ſa partie AS, comme le nombre des puiſſances à l'unité; puiſque (*Hyp.*) le nombre de ces puiſſances ſeroit celui de ces côtez non diagonaux, ou celui des parallelogrammes plus un.

COROLLAIRE II.

On voit de-là ſuivant ce Lemme-ci, que la derniere diagonale AP étant donnée, ou ſa partie AS, il eſt aiſé de trouver l'une par l'autre ayant le nombre des puiſſances; ſçavoir ici $AP = 4 \times AS$, & $AS = \frac{1}{4} AP$: mais ſi l'une ni l'autre n'étoit donnée que de poſition AO, comme dans la Fig. 30. par rapport aux proportionnelles & directions AC, AB, AM, AN, &c. des puiſſances appellées C, B, M, N, &c. dont le nombre ſoit n, il faudroit avoir recours au Corol. 3. du Lem. 10. lequel ſans faire aucun parallelogramme, donneroit la derniere diagonale cherchée $AP = AF + AH + AG - AE \pm$, &c. en menant ſeulement des extrêmitez des proportionnelles précedentes les paralleles CF, BH, MG, NE, &c. ſous quelque angle qu'elles rencontrent la direction donnée AO de cette diagonale cherchée AP prolongée de part & d'autre: de-là le preſent Lem. 11. donnant $AS = \frac{AP}{n}$, l'on auroit auſſi $AS = \frac{AF + AH + AG - AE \pm \&c.}{n}$ ſans (dis-je) fai- FIG. 27. 28.

re aucun parallelogramme. D'où l'on voit ſuivant le précédent Corol. 1. que l'unité ſeroit ici au nombre n des puiſſances, comme $\frac{AF + AH + AG - AE \pm \&c.}{n}$ à la derniere diagonale cherchée AP, qui ſe trouvera ainſi dans la Fig. 28. ſans y faire aucun des parallelogrammes qui l'ont donnée dans la Fig. 27. Corol. 1. du Lem. 10.

COROLLAIRE III.

FIG. 29. Mais cela ſuppoſe qu'on ait la poſition AO de la derniere diagonale AP, par rapport aux directions données des puiſſances. Preſentement pour trouver cette poſition il faut conſiderer,

1°. Que BQ=CQ, ou BQ.CQ :: 1. 1. Puiſque BQ. CQ :: AB.CD :: 1. 1.

2°. Que RM. RQ :: 2. 1. Puiſque RM. RQ :: LM. AQ :: AD. AQ :: BC. CQ (*nomb.* 1) :: 2. 1.

3°. Que NS.RS :: 3. 1. Puiſque NS.RS :: NP. AR :: AL.AR :: QM.QR (*nomb.* 2.) :: 3. 1. Et ainſi à l'infini.

D'où l'on voit que les directions AC, AB, AM, AN, &c. des puiſſances C, B, M, N, &c. étant données proportionnelles à ces mêmes puiſſances, ſi par les extrêmitez des deux premieres AC, AB, on mene la droite BC, ſon milieu Q avec A donnera la poſition de la premiere diagonale AD. Si l'on mene enſuite de ce point Q la droite QM à l'extrêmité M de la troiſiéme proportionnelle AM, laquelle QM ſoit diviſée en R de maniere qu'on ait RM.RQ :: 2. 1. ce point R avec A donnera la poſition de la ſeconde diagonale AL. Si après cela du point R on mene la droite RN à l'extrêmité N de la quatriéme proportionnelle AN, laquelle RN ſoit diviſée en S de maniere qu'on ait NS.RS :: 3. 1. ce point S avec le point A donnera la poſition de la troiſiéme diagonale AP; & ainſi à l'infini, en diviſant de même en raiſon reciproque de 1 à 4, la ligne qui de S ſe termineroit à l'ex-

trêmité d'une cinquiéme proportionnelle ; la suivante en raison reciproque de 1 à 5 ; la suivante encore en raison reciproque de 1 à 6, & toûjours de même les suivantes, en raison réciproque de 1 à 7, de 1 à 8, de 1 à 9, de 1 à 10, &c.

C'est-à-dire en general (en appellant les droites BC, QM, RN, &c. *Lieux des puissances* : sçavoir ici BC, *Lieu des deux puissances* C, B ; QM, *Lieu des trois puissances* C, B, M ; RN, *Lieu des quatre puissances* C, B, M, N ; &c. qu'en divisant chaque Lieu en raison reciproque de l'unité de la puissance, à la proportionnelle de laquelle il se termine par un bout, au nombre des puissances du lieu auquel il se termine par l'autre bout, de même que RN ici divisée en SN. SR :: 3. 1. l'est en raison reciproque de l'unité de la puissance N au nombre 3. des puissances C, B, M, du Lieu QM : on voit, dis-je, en general que le point d'une telle division de chaque Lieu, donnera toûjours avec A la position de la diagonale, suivant laquelle se fait le concours d'action de toutes les puissances de ce Lieu, de même que le point S du Lieu RN ainsi divisé en ce point S, donne avec le point A la position de la diagonale AP, suivant laquelle se fait ici (*Lem.* 3. *Corol.* 10.) le concours d'action des quatre puissances C, B, M, N, de ce Lieu RN.

COROLLAIRE IV.

Suivant cela, & le Corol. 2. il sera toûjours aisé de trouver la position & la longueur de la derniere diagonale de tant de parallelogrammes qu'on voudra, faits comme dans le present Lemme 11. sans en faire aucun, ayant seulement les directions AC, AB, AM, AN, &c. des puissances C, B, M, N, &c. proportionnelles à ces mêmes lignes : voici comment. FIG. 36.

1°. Ces proportionnelles ayant été prises jusqu'ici dans un ordre arbitraire, le Corol. 3. fait voir que si par les extrêmitez C, B, de deux quelconques AC, AB, d'entr'elles on mene la droite CB ; que de son milieu Q on

mene QM à l'extrêmité M d'une troisiéme proportionnelle aussi quelconque AM, laquelle QM soit divisée en R, de maniere qu'on ait RM. RQ :: 2. 1. Qu'ensuite on mene RN à l'extrêmité N d'une quatriéme proportionnelle encore quelconque AN, laquelle RN soit divisée en S, de maniere qu'on ait SN. SR :: 3. 1. l'on aura AS prolongée vers O pour la position de la derniere diagonale AP des parallelogrammes faits comme dans ce Lemme-ci, sans en faire aucun ; & ainsi de quelque autre nombre de puissances, ou de leurs proportionnelles qu'on puisse supposer. De sorte que si n étoit le nombre des puissances, lesquelles prises dans l'ordre précedent eussent QM pour le lieu de toutes, hors de la derniere N ; l'analogie SN. SR :: $n-1$. 1. donneroit AS pour la position AO de la diagonale du dernier des parallelogrammes faits comme dans ce Lemme-ci.

2°. La position AO de la diagonale du dernier de ces parallelogrammes étant ainsi trouvée, ce Lemme-ci donnera la longueur AP de cette derniere diagonale $= 4 \times$ AS, s'il n'y a (comme ici) que trois parallelogrammes, que les quatre puissances C, B, M, N ; & en general cette longueur sera $= n \times$ AS, si le nombre des puissances est $= n$, ou celui des parallelogrammes $= n-1$.

Le Corol. 2. donnera aussi la longueur de cette derniere diagonale $=$ AF $+$ AH $+$ AG $-$ AE $\pm$ &c. dans la
FIG. 28. Fig. 28. sans faire aucun parallelogramme, en laissant tomber des extrêmitez des directions proportionnelles AC, AB, AM, AN, &c. des puissances C, B, M, N, &c. autant de perpendiculaires CF, BH, MG, NE, &c. sur la position AO (de cette diagonale) trouvée dans le nomb. 1.

COROLLAIRE V.

FIG. 29. Ce dernier Corol. 4. fournit la maniere de déterminer la route ou la direction & la force d'un corps poussé ou tiré par le concours de plusieurs puissances données, & de directions données qui partent d'un même point, sans faire aucun parallelogramme. Car puisque ce corps par le con-

cours de toutes ces puiſſances quelconques, quelles qu'en ſoient les directions & le nombre, doit (*Lem.* 3. *Corol.* 10.) être pouſſé ou tiré ſuivant la diagonale du dernier des parallelogrammes faits (comme ci-deſſus) de leurs directions proportionnelles, & avec une force qui ſoit à chacune de ces puiſſances comme cette diagonale à chacune de leurs proportionnelles; & que le précedent Corol. 4. donne la poſition & la longueur de cette derniere diagonale, ſans faire aucun parallelogramme, il donnera auſſi ſans en faire aucun, la route ou la direction & la force du corps pouſſé ou tiré par toutes ces puiſſances à la fois; c'eſt-à-dire (*Def.* 7.) la direction commune de toutes ces puiſſances, & la force réſultante de leur concours ſuivant cette direction. De ſorte que ſi ce corps eſt pouſſé ou tiré à la fois, par exemple, par quatre puiſſances C, B, M, N, données avec leurs directions particulieres AC, AB, AM, AN, leſquelles ſoient proportionnelles à ces puiſſances, il n'y aura qu'à mener la droite CB; enſuite de ſon milieu Q mener la droite QM, laquelle ſoit diviſée en R, de maniere qu'on ait RM. RQ :: 2. 1. Après cela mener RN, qui ſoit auſſi diviſée en S, mais de maniere qu'on ait SN. SR :: 3. 1. Enfin mener AS prolongée vers O, ſur laquelle ſoit priſe AP=4×AS : cette droite AP ſera (*Corol.* 3.) de poſition & de grandeur la diagonale du dernier des parallelogrammes qui auroient été faits (comme dans ce Lemme-ci, Fig. 29.) des proportionnelles ſuppoſées. Donc (*Lem.* 3. *Corol.* 10.) les quatre puiſſances ici ſuppoſées C, B, M, N, pouſſeront ou tireront enſemble le long de cette ligne AP ou AS le corps auquel elles ſont appliquées, & d'une force qui ſera a chacune d'elles comme cette même AP ou ſa valeur 4×AS eſt à chacune de leurs proportionnelles AC, AB, AM, AN. Et ainſi de tout autre nombre de puiſſances à volonté, qu'on ſuppoſeroit agir à la fois ſur ce corps ſuivant des directions qui partiſſent d'un même point. FIG. 30.

COROLLAIRE VI.

Les divisions précedentes supposées des lignes CB, QM, NR, &c. en Q, R, S, &c. on voit (*Corol.* 5.) que l'effort résultant du concours des deux puissances C, B, se feroit suivant AQ; que le résultant du concours des trois puissances C, B, M, se feroit suivant AR; que le résultant du concours des quatre puissances C, B, M, N, se feroit suivant AS, & ainsi de tant de puissances qu'on voudra supposer agir toutes à la fois sur un même point A, de quelque maniere que ce soit. Donc suivant le Corol. 1. du principe general (si les lieux CB, QM, NR, &c. étoient autant de verges inflexibles & sans pesanteur, ausquelles les puissances C, B, M, N, &c. sans changer de direction, étoient appliquées comme on le voit ici) il y auroit équilibre entre les deux puissances C, B, sur un appui placé en Q; entre les trois puissances C, B, M, sur un appui placé en R; entre les quatre puissances C, B, M, N, sur un appui placé en S, & ainsi de tel autre nombre de puissances qu'on voudra, dirigées toutes par A. D'où l'on voit (*Déf.* 8.) que Q est le centre d'équilibre des deux puissances C, B; que R est celui des trois puissances C, B, M; que S est celui des quatre puissances C, B, M, N, &c. sur les verges ou lignes CB, QM, RN, &c. supposées inflexibles & sans pesanteur.

DEFINITION XIII.

Ces points Q, R, S, &c. seront appellez dans la suite *centres principaux d'équilibre* de ces puissances C, B, M, N, &c. sçavoir Q, *centre principal d'équilibre des puissances* C, B; R, *centre principal d'équilibre des puissances* C, B, M; S, *centre principal d'équilibre des puissances* C, B, M, N; & ainsi de tout autre nombre de puissances libres dirigées toutes par le point A, suivant quelques plans que ce soit.

DEFINITION XIV.

Les pesanteurs particulieres de toutes les parties d'un

poids quelconque pouvant être regardées (*Ax.* 2.) comme autant de puissances qui agissent ensemble sur lui de haut en bas avec des forces égales à ces pesanteurs, & suivant les mêmes directions qu'elles ; il suit du Corol. 10. du Lem. 3. qu'il en doit résulter à ce corps entier une impression ou force totale de haut en bas, qui en fasse la *pesanteur* totale, & suivant une ligne qui (*Déf.* 3.) en soit la *direction*. Quelle que soit cette ligne de direction de la pesanteur d'un corps, elle s'appellera *verticale* dans la suite ; & les perpendiculaires à celle-là, seront nommées *horisontales*. Si en quelque sens qu'on tourne ce poids, la direction de sa pesanteur passe toûjours par un même point de ce corps, ce point s'appellera à l'ordinaire le *centre de gravité* de ce même corps.

COROLLAIRE.

Le Corol. 1. du principe general fait voir qu'un poids qui auroit un tel point, quelque situation qu'on lui donnât autour de ce point, il y demeureroit toûjours en équilibre & en repos tant que ce point seroit soûtenu, ou fixement arrêté, nonobstant la mobilité de ce corps autour de ce même point fixe.

On verra dans la suite si un tel centre de gravité est possible, & en quel sens ; c'est-à-dire, quelles doivent être pour cela les directions des pesanteurs particulieres de toutes les parties des poids. En attendant nous ne nous servirons point des centres de gravité, mais seulement des directions de ces poids, lesquelles se trouvent toûjours (Corol. 2. princip. gener.) *être les lignes suivant lesquelles ils demeurent suspendus.*

LEMME XII.

Soit un parallelogramme quelconque MDNG, dont les deux côtez DM, DN, prolongez (s'il est necessaire) soient rencontrez perpendiculairement en H, K, par les deux côtez HR, KR, d'un angle aussi quelconque HRK placé en même plan. Je dis que si HR×DM=KR×DN, ou (ce qui revient au même) si HR. KR : : DN. DM. La diagonale DG du pa- FIG. 31. 32.

rallelogramme MDNG, prolongée (s'il est necessaire) passera par l'angle R.

DEMONSTRATION.

Si l'on nie que la diagonale DG passe par l'angle R, soit menée la droite DR, qui soit prise pour le sinus total; soit aussi prise ſ pour la marque ou la caracteristique des autres sinus. Les angles (*Hyp.*) droits en H, K, donneront ſHDR. ſKDR :: HR. KR (*Hyp.*) :: DN. DM :: MG. DM (*Lem.* 8. *Cor.* 2.) :: ſMDG. ſMGD :: ſMDG. ſNDG. Cependant si DG ne se confondoit pas avec DR, l'on auroit ici ſHDR à ſKDR en moindre raison que ſMDG à ſNDG; & en plus grande, si DR y étoit de l'autre côté de DG. Donc ces deux lignes DG, DR, doivent se confondre en une; & par consequent la diagonale DG ainsi confondue avec DR, & prolongée, s'il est necessaire, passera comme DR par l'angle R. *Ce qu'il falloit démontrer.*

LEMME XIII.

FIG. 33. *Par un point D donné dans un angle donné HAG, mener une ligne droite BC, que ce point D divise en raison donnée de* m *à* n, *c'est-à-dire, en sorte qu'on ait BD. DC ::* m. n.

SOLUTION.

Sur AD prolongée du côté de D, soit prise DE. AD :: *n. m.* Soit menée EC parallele à AG, & qui rencontre AH en C; de ce point C par le donné D soit menée CD, qui prolongée rencontre AG en B: je dis que CB est la ligne requise, c'est-à-dire, que non seulement elle passe par le point donné D, mais encore qu'elle y est divisée de maniere que BD. DC :: *m. n.* ainsi qu'il est ici requis.

DEMONSTRATION.

Puisque AB, EC, sont (*constr.*) paralleles entr'elles, & qu'ainsi les triangles ADB, EDC, sont semblables entr'eux, l'on aura ici DC. DB :: DE. DA (*constr.*) :: *n. m.*

Donc

Donc (en renversant) BD. DC :: $m.n.$ *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

LEMME XIV.

Deux points A, B, étant donnez à volonté, mener du premier A deux lignes AD, AC, de grandeurs données P, Q; & du second B, une ligne BC, laquelle soit divisée en D, C, par ces deux-là, en raison donnée de m *à* n *: c'est-à-dire, en sorte qu'on ait ici tout à la fois AD=P, AC=Q, & BD. DC ::* m. n. Fig. 34.

SOLUTION.

Soit menée AB par les deux points donnez A, B, & sur elle prolongée du côté de B, soit prise AE. AB :: $n.m.$ Des centres A, E, & des rayons AF$=\frac{m+n}{m}\times$P, EF=Q, soient décrits deux arcs de cercles qui se coupent en F; ensuite après avoir mené AC, FC, paralleles à EF, EA, & qui se coupent en C, soit menée BC, que la droite AF coupe en C. Cela fait, je dis que AC=Q, AD=P, & que BD. DC :: $m.n.$ ainsi qu'il est ici requis.

DEMONSTRATION.

Car le parallelogramme AEFC résultant de cette construction, rendant AC=EF (*Hyp.*) =Q, CF=AE, & les triangles ADB, FDC, semblables entr'eux, donne premierement AC=Q; secondement, FD. AD :: FC. AB :: AE. AB (*constr.*) :: $n.m.$ D'où résulte (en composant) $m+n.$ m :: AF $\left(\frac{m+n}{m}\times P\right)$. AD=P. Troisiémement enfin BD. DC :: AB. FC :: AB. AE (*constr.*) :: $m.n.$ Donc cette même construction donnera ici tout à la fois AC=Q, AD=P, & BD. DC :: $m.n.$ *Ce qu'il falloit démontrer.*

LEMME XV.

Soit une ligne droite XO mobile autour d'un de ses points B fixe, qui la divise en deux branches ou parties BX, BO, telles Fig. 35. 36.

L

qu'on voudra : imaginons-la se mouvoir de XO en xω autour de ce point fixe B. Par un autre point quelconque A soient menées des points X, x, O, ω, les quatre droites XA, xA, OA, ωA, sur lesquelles du point B tombent autant de perpendiculaires BD, Bd, BP, Bp. Je dis que la branche BX qui se sera ainsi approchée du point A en Bx, pendant que l'autre BO (moindre, plus grande, ou égale à elle ; il n'importe) s'en sera éloignée en Bω, donnera toûjours BP. BD > Bp. Bd. c'est-à-dire, BP à BD en plus grande raison que Bp à Bd.

DEMONSTRATION.

Après avoir pris Xb, xβ, chacune égale à BO ou à Bω, sur OX, ωx, soient menées bm, βμ, perpendiculaires sur AX, Ax, prolongées s'il en est besoin. Cela fait,

1°. En prenant Bω ou son égale βx pour le sinus total, l'on aura (*Déf. 9. Corol. 1.*) βμ à Bp comme le sinus de l'angle βxμ est au sinus de l'angle Bωp, ou (*Déf. 9. Corol. 1.*) comme le sinus de l'angle BxA est au sinus de l'ange BωA ; & consequemment aussi (*Lem. 8. Corol. 2.*) comme Aω est à Ax, c'est-à-dire, βμ. Bp : : Aω. Ax. Mais les triangles (*constr.*) semblables Bxd, βxμ, donnant Bd. βμ : : BX. βx (*constr.*) : : BX. BO. Donc (en multipliant par ordre) Bd. Bp : : BX×Aω. BO×Ax.

2°. En prenant encore BO ou son égale bX pour le sinus total, l'on aura de même (*Déf. 9. Corol. 1.*) BP à bm comme le sinus de l'angle BOP est au sinus de l'angle bXm ; & consequemment aussi (*Lem. 8. Corol. 2.*) comme AX est à AO, c'est-à-dire, BP. bm : : AX. AO. Mais les triangles (*constr.*) semblables bmX, BDX, donnent bm. BD : : bX. BX (*constr.*) : : BO. BX. Donc (en multipliant par ordre) BP. BD : : BO×AX. BX×AO.

Ces nomb. 1. 2. donnant ainsi Bd. Bp : : BX×Aω. BO×Ax. Et BP. BD : : BO×AX. BX×AO. l'on aura (en multipliant par ordre) BP×Bd. BD×Bp : : BO×AX×BX×Aω. BX×AO×BO×Ax : : AX×Aω. AO×Ax. Mais la construction donnant AX > Ax, & Aω > AO, donne pareillement AX×

$A\omega > AO \times Ax$. Donc aussi $BP \times Bd > BD \times Bp$; & par consequent $BP.BD > Bp.Bd$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

Soit menée la droite BA, & pour abreger nos expressions, soit ſ la caracteriſtique des ſinus, en ſorte que $\text{ſ}BAO$, $\text{ſ}BAX$, &c. ſignifient les ſinus des angles BAO, BAX, &c. Cela poſé, le Corol. 2. du Lem. 8. donnera $BO.AO :: \text{ſ}BAO.\text{ſ}ABO$. Le même Corol. 2. du Lem. 8. donnera auſſi $AX.BX :: \text{ſ}ABX.\text{ſ}BAX$ (*Déf. 9. Corol. 2.*) $:: \text{ſ}ABO.\text{ſ}BAX$. L'on aura de plus $AO.AX :: AO.AX$. Donc (en multipliant ces trois analogies par ordre) l'on aura $BO.BX :: AO \times \text{ſ}BAO.AX \times \text{ſ}BAX$. Par un ſemblable raiſonnement on trouvera de même $B\omega.Bx :: A\omega \times \text{ſ}BA\omega.Ax \times \text{ſ}BAx$. Mais (*Hyp.*) $BO.BX :: B\omega.Bx$. Donc auſſi $AO \times \text{ſ}BAO.AX \times \text{ſ}BAX :: A\omega \times \text{ſ}BA\omega.Ax \times \text{ſ}BAx$. Et conſequemment $AO \times Ax \times \text{ſ}BAO \times \text{ſ}BAx = AX \times A\omega \times \text{ſ}BAX \times \text{ſ}BA\omega$; d'où réſulte $AX \times A\omega.AO \times Ax :: \text{ſ}BAO \times \text{ſ}BAx.\text{ſ}BAX \times \text{ſ}BA\omega$. Mais la conſtruction donnant $AX > Ax$, & $A\omega > AO$, donne $AX \times A\omega > AO \times Ax$. Donc auſſi $\text{ſ}BAO \times \text{ſ}BAx > \text{ſ}BAX \times \text{ſ}BA\omega$. Or en prenant AB pour le ſinus total, l'on aura (*Déf. 9. Corol. 1.*) $BP = \text{ſ}BAO$, $BD = \text{ſ}BAX$, $Bp = \text{ſ}BA\omega$, & $Bd = \text{ſ}BAx$. Donc $BP \times Bd > BD \times Bp$. Par conſequent $BP.BD > Bp.Bd$. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

TROISIÉME DEMONSTRATION.

Toutes choſes demeurant les mêmes, le Corol. 2. du Lem. 8. donnera,

1°. $\text{ſ}BA\omega.\text{ſ}A\omega B :: B\omega.AB$ (*conſtr.*) $:: BO.AB$.

2°. $\text{ſ}A\omega B.\text{ſ}AxB :: Ax.A\omega$.

3°. $\text{ſ}AxB.\text{ſ}BAx :: AB.Bx$ (*conſtr.*) $:: AB.BX$.

Donc (en multipliant par ordre) $\text{ſ}BA\omega.\text{ſ}BAx :: BO \times Ax.A\omega \times BX$. ou $\text{ſ}BAx.\text{ſ}BA\omega :: A\omega \times BX.BO \times Ax$. On trouvera de même $\text{ſ}BAO.\text{ſ}BAX :: BO \times AX.AO \times BX$. (Donc en multipliant encore par ordre) $\text{ſ}BAO \times \text{ſ}BAx.\text{ſ}BAX \times \text{ſ}BA\omega :: BO \times AX \times A\omega \times BX.AO \times BX \times BO \times Ax ::$

AX×Aω. AO×Ax, c'est-à-dire, AX×Aω. AO×Ax :: ∫BAO×∫BAx. ∫BAX×∫BAω. comme dans la précedente Démonstration 2. Ce qui donnera ici comme là BP. BD > Bp. Bd. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

LEMME XVI.

FIG. 37. & suivantes jusqu'à 49. *Si sur les deux côtez contigus AB, AC, d'un parallelogramme quelconque ABDC, & sur la diagonale AD, qui passe par l'angle BAC (que j'appelle* capital *) compris entre ces deux côtez AB, AC, on fait autant de triangles ASB, ASC, ASD, d'un sommet commun S donné à volonté autre que le point A, sur le plan de ce parallelogramme ABDC; je dis,*

FIG. 37. 38. 39. I. *Que lorsque ce point S sera dans le complement (à deux droits) BAF ou CAF de l'angle capital BAC, comme dans les Fig. 37. 38. 39. Le triangle ASD construit sur la diagonale AD du parallelogramme proposé ABDC, sera toûjours égal à la somme des deux autres triangles ASC, ASB, construits sur les côtez AC, AB, de cet angle capital BAC, c'est-à-dire, qu'alors on aura toûjours ASD = ASC + ASB.*

FIG. 40. 41. 42. 43. II. *Que lorsque le point donné S sera dans l'angle capital BAC, ou dans son opposé EAF, comme on le voit dans les Fig. 40. 41. 42. 43. Le triangle ASD sera toûjours égal à la difference des deux autres ASC, ASB, desquels le plus petit aura pour base le côté qui avec la diagonale fait des angles opposez, dans l'un desquels le point S se trouve, comme ici le triangle ASB, dont la base est le côté AB, qui avec la diagonale AD, forme les angles opposez DAB, KAE, dans un desquels ce point S se trouve; c'est-à-dire, qu'alors on aura par tout ici ASD = ASC − ASB.*

FIG. 44. 45. 46. III. *Que lorsque le point S sera sur un des côtez (prolongé ou non) de l'angle capital BAC du parallelogramme ABDC, comme on le voit sur AB dans les Fig. 44. 45. 46. Le triangle ASD sera toûjours égal à celui qui aura pour base l'autre côté contigu AC de ce parallelogramme; c'est-à-dire, qu'alors on aura toûjours ici ASD = ASC.*

IV. *Que si enfin le point S est sur la diagonale AD (prolongée ou non) comme dans les Fig. 47. 48. 49. l'on aura toûjours ASB=ASC.* FIG. 47. 48. 49.

DEMONSTRATION.

Préparation pour tous les cas. Si du sommet commun S des trois triangles ASD, ASB, ASC, dont il est ici question, l'on mene SG perpendiculaire en G, H, aux côtez paralleles AC, BD, du parallelogramme ABDC; l'on aura GS, GH, HS, pour les hauteurs des triangles ASC, BAD, BSD, au-dessus de leurs bases AC, BD, perpendiculaires (*constr.*) à ces hauteurs. Par consequent on aura leurs aires $ASC=\frac{1}{2}AC\times GS$, $BAD=\frac{1}{2}BD\times GH=\frac{1}{2}AC\times GH$, $BSD=\frac{1}{2}AC\times HS$; ce qui donne, FIG. 37. & suivantes jusqu'à 49.

1°. $BAD+BSD=\frac{1}{2}AC\times GH+\frac{1}{2}AC\times HS=\frac{1}{2}AC\times\overline{GH+HS}$ (dans les Fig. 37. 39. 40. 42. 44. 47.) $=\frac{1}{2}AC\times GS=ASC$.

2°. $BAD-BSD=\frac{1}{2}AC\times GH-\frac{1}{2}AC\times HS=\frac{1}{2}AC\times\overline{GH-HS}$ (dans les Fig. 38. 39. 41. 42. 45. 48.) $=\frac{1}{2}AC\times GS=ASC$.

3°. $BSD-BAD=\frac{1}{2}AC\times HS-\frac{1}{2}AC\times GH=\frac{1}{2}AC\times\overline{HS-GH}$ (dans les Fig. 43. 46. 49.) $=\frac{1}{2}AC\times GS=ASC$. Or,

PART. I. Les Fig. 37. 39. donnent $ASD=ASB+BAD+BSD$, & les Fig. 38. 39. donnent $ASD=ASB+BAD-BSD$. Donc (*prep. nomb.* 1. 2.) ce cas du point S dans le complement BAF de l'angle capital BAC, comme on le voit dans les Fig. 37. 38. 39. donnera toûjours $ASD=ASB+ASC$. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.* FIG. 37. 38. 39.

PART. II. Les Fig. 40. 42. donnent $ASD=BAD+BSD-ASB$, les Fig. 41. 42. donnent $ASD=BAD-BSD-ASB$, & la Fig. 43. donne $ASD=BSD-BAD-ASB$. Donc (*prep. nomb.* 1. 2. 3.) ce cas du point S dans un des angles opposez DAB, KAE, comme on le voit dans les FIG. 40. 41. 42. 43.

Fig. 40. 41. 42. 43. donnera toûjours ASD=ASC—ASB. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

On trouveroit de même ASD=ASB—ASC, si S étoit dans un des angles opposez DAC, KAF.

Fig. 44. 45. 46. PART. III. La Fig. 44. donne ASD=BAD+BSD, la Fig. 45. donne ASD=BAD—BSD, & la Fig. 46. donne ASD=BSD—BAD. Donc (*prep. nom.* 1. 2. 3.) ce cas du point S sur le côté AB prolongé de l'angle capital BAC, comme on le voit dans les Fig. 44. 45. 46. donnera toûjours ASD=ASC. *Ce qu'il falloit* 3°. *démontrer.*

On trouveroit de même ASD=ASB, si le point S étoit quelque part sur l'autre côté AC prolongé.

Fig. 47. 48. 49. PART. IV. La Fig. 47. donne ASB=BAD+BSD; la Fig. 48. donne ASB=BAD—BSD, & la Fig. 49. donne ASB=BSD—BAD. Donc (*prep. nomb.* 1. 2. 3.) ce cas du point S placé quelque part sur la diagonale AD prolongée, comme on le voit dans les Fig. 47. 48. 49. donnera toûjours ASB=ASC. *Ce qu'il falloit* 4°. *démontrer.*

COROLLAIRE I.

Fig. 37. & suivantes jusqu'à 48. Si presentement du point S on mene SM, SN, perpendiculaires en M, N, sur AB, AD, prolongées, s'il est necessaire, comme SG est (*constr.*) perpendiculaire en G sur AC prolongée; l'on aura les aires triangulaires ASD $=\frac{1}{2}AD\times SN$, ASB$=\frac{1}{2}AB\times SM$, & ASC$=\frac{1}{2}AC\times SG$. Or,

Fig. 37. 38. 39. 1°. La Part. 1. donne ASD=ASB+ASC dans les Fig. 37. 38. 39. qui ont le point S dans le complement BAF de l'angle capital BAC. Donc en ce cas on aura toûjours $\frac{1}{2}AD\times SN=\frac{1}{2}AB\times SM+\frac{1}{2}AC\times SG$, ou $AD\times SN=AB\times SM+AC\times SG$.

On trouveroit la même chose, de la même maniere, si S étoit dans l'autre complement CAE de l'angle capital BAC.

Fig. 40. 41. 42. 43. 2°. La Part. 2. donne ASD=ASC—ASB dans les Fig. 40. 41. 42. 43. qui ont le point S dans un des angles opposez DAB, KAE. Donc en ce cas on aura toûjours

$\frac{1}{2}ADxSN=\frac{1}{2}ACxSG-\frac{1}{2}ABxSM$, ou $ADxSN=ACxSG-ABxSM$.

On trouveroit de même $ADxSN=ABxSM-ACxSG$, si le point S étoit dans un des angles opposez DAC, KAF.

3°. La Part. 3. donne ASD=ASC dans les Fig. 44. 45. 46. qui ont le point S sur le côté AB prolongé ou non, de l'angle capital BAC. Donc en ce cas on aura toûjours $\frac{1}{2}ADxSN=\frac{1}{2}ACxSG$, ou $ADxSN=ACxSG$. FIG. 44. 45. 46.

4°. La Part. 4. donne ASB=ASC dans les Fig. 47. 48. 49. qui ont le point S sur la diagonale AD prolongée ou non. Donc en ce cas on aura toûjours $\frac{1}{2}ABxSM=\frac{1}{2}ACxSG$, ou $ABxSM=ACxSG$. FIG. 47. 48. 49.

COROLLAIRE II.

Puisque (*Corol.* 1. *nomb.* 3.) $ADxSN=ACxSG$ dans le cas du point S pris ou donné sur le côté AB prolongé ou non, de l'angle capital BAC, comme dans les Fig. 44. 45. 46. & que (*Corol.* 1. *nomb.* 4.) $ABxSM=ACxSG$ dans le cas de ce point S pris sur la diagonale AD prolongée ou non, du parallelogramme quelconque ABDC, menée par cet angle capital BAC, comme dans les Fig. 47. 48. 49. On voit que dans le premier de ces deux cas on aura toûjours SG. SN :: AD. AC. Et dans le second, SG. SM :: AB. AC. D'où l'on voit en general que si d'un point S, pris ou donné à volonté sur un des côtez AB, AC, ou sur la diagonale AD (qui passe par leur angle BAC) d'un parallelogramme quelconque ABDC, on mene deux perpendiculaires sur les deux autres de ces trois lignes prolongées ou non; ces deux perpendiculaires seront toûjours entr'elles en raison reciproque des deux côtez, ou d'un d'eux, & de la diagonale du parallelogramme proposé quelconque, sur lesquels ces deux perpendiculaires sont à angles droits. FIG. 44. & suivantes jusqu'à 49.

C'eſt ce qu'on a déja vû autrement démontré dans le Corol. 10. du Lemme 8.

SCHOLIE.

FIG. 39. 42. & ſuivantes juſqu'à 49. Ce n'a été que pour démontrer par la même méthode tous les cas du preſent Lem. 16. qu'on a employé dans tous la perpendiculaire SG au côté AC de l'angle capital BAC ; car on peut aiſémement s'en paſſer dans les cas des Fig. 39. 42. 44. 45. 46. 47. 48. 49. & même la démonſtration en ſera plus ſimple que par cette voye generale. En effet,

FIG. 39. 42. 1°. Dans les Fig. 39. 42. les triangles ASC, BAD, de baſes égales AC, BD, & compris entre ces mêmes paralleles, étant ainſi égaux entr'eux, l'on aura tout d'un coup ASD=ASB+BAD=ASB+ASC dans la Fig. 39. & ASD=BAD—ASB=ASC—ASB dans la Fig. 42. le tout conformément à ce qu'on a trouvé de l'autre maniere pour ces deux Fig. 39. 42. dans les démonſtrations des Part. 1. 2.

FIG. 44. 45. 46. 2°. Dans les Fig. 44. 45. 46. les triangles ASD, ASC, étant ſur mêmes baſes AS, & entre mêmes paralleles AS, CD ; on voit encore plus promptement que ces deux triangles ſont égaux entr'eux, conformément à ce qu'on en a trouvé dans la démonſtration de la Part. 3.

FIG. 47. 48. 49. 3°. Dans les Fig. 47. 48. 49. les triangles égaux ABD, ACD, ayant des hauteurs égales ſur leur baſe commune AD, & ces hauteurs étant auſſi celles des triangles ABS, ACS, ſur leur baſe commune AS : ces deux derniers triangles ſeront auſſi égaux entr'eux, conformément à ce qu'on en a trouvé pour ces trois Fig. 47. 48. 49. dans la démonſtration de la Part. 4.

LEMME XVII.

FIG. 50. 51. *Si plus de deux puiſſances B, C, D, E, F, G, &c. ſont appliquées à autant de cordons attachez enſemble par un ſeul & même nœud commun A, que rien autre choſe ne retient, l'équilibre eſt impoſſible entre ces puiſſances (quelles qu'elles ſoient,*

soient, & quel qu'en soit le nombre) lorsqu'elles sont dirigées de maniere qu'un plan RS puisse passer par ce nœud commun A de leurs cordons, sans passer entr'elles ou entr'eux, ou sans qu'elles soient toutes dans ce plan, c'est-à-dire, sans diviser aucun des angles que ces cordons font entr'eux, & sans qu'ils soient tous dans ce même plan.

DEMONSTRATION.

Il est visible qu'un plan RP, qui rencontreroit ainsi en A tous les cordons des puissances supposées auroit toutes ces puissances tirantes d'un seul côté par rapport à lui, comme dans la Fig. 50. ou quelques-unes tirantes vers ce seul côté-là, pendant que toutes les autres tireroient suivant ce plan comme dans la Fig. 51. Donc de quelque maniere que l'on combine toutes ces puissances, il ne résultera du concours de toutes qu'une impression totale vers le côté où il y aura des puissances hors le plan supposé. Donc il ne pourra y avoir alors d'équilibre entre toutes ces puissances, ausquelles rien d'ailleurs (*Hyp.*) ne s'oppose. *Ce qu'il falloit démontrer.* FIG. 50. 51.

COROLLAIRE I.

Donc quelques soient les directions de plus de deux cordons (en quelque nombre qu'ils soient) attachez ensemble par un seul & même nœud, & quelques puissances qu'on leur applique, une à chacun, l'équilibre sera impossible entre ces puissances.

1°. Dans le cas de tous les cordons en même plan, si le prolongement de quelqu'un d'eux ne divise pas quelqu'un des angles que les autres cordons font entr'eux; puisqu'un autre plan que le leur, mené suivant ce cordon-là, les rencontreroit alors tous en leur nœud commun sans passer entr'eux, & sans qu'ils fussent tous dans ce plan.

2°. Dans le cas des mêmes cordons en plans differens, si quelqu'un de ces plans prolongé ne passe pas à travers des cordons des autres plans; puisque celui-là sera

lui-même un plan qui rencontrera tous ces cordons en leur nœud commun ſans paſſer entr'eux.

COROLLAIRE II.

Il ſuit encore de ce Lemme-ci, que quelques ſoient les directions de plus de deux cordons (en quelque nombre qu'ils ſoient encore) attachez enſemble par un ſeul & même nœud, qui ſoit regardé comme le centre d'un cercle, ou d'une ſphere; que ſi ces cordons ne ſont pas répandus en plus d'une demi-ſphere, lorſqu'ils ſont en plans differens, & en plus d'un demi-cercle, s'ils ſont en même plan; quelques puiſſances qu'on leur applique, une à chacun, elles ne pourront jamais être en équilibre entr'elles ſuivant ces directions; puiſqu'on pourra faire paſſer un plan par le nœud commun, ſans qu'il paſſe entre ces cordons, & ſans qu'ils ſoient tous dans ce plan.

LEMME XVIII.

I. *Lorſque tous les cordons iſſus d'un même nœud, ſont dirigez ſuivant un même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle, il n'y en a aucun qui prolongé par de-là ce nœud commun, ne paſſe entre les autres cordons, c'eſt-à-dire, à travers quelqu'un de leurs angles.*

DEMONSTRATION.

Car s'il n'y paſſoit pas, il ſeroit le diametre terminant d'un demi-cercle, dans lequel ſeul lui & les autres cordons ſeroient alors tous répandus; ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc, &c.

II. *Dans la même hypotheſe de tous les cordons dirigez ſuivant un même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle; quelque ligne droite qu'on mene ou qu'on imagine ſur ce plan par le nœud commun, ſans paſſer par aucun d'eux; elle paſſera toûjours de part & d'autre du nœud à travers deux des angles que ces cordons ſont entr'eux.*

DEMONSTRATION.

Car si elle ne passoit à travers aucun de ces angles, elle seroit le diametre terminant d'un demi-cercle dans lequel tous ces cordons seroient; ce qui est contre l'hypothese; & si cette ligne droite ne passoit à travers que d'un des angles de ces cordons, les deux cordons voisins à droite & à gauche de cette ligne droite du côté qu'elle ne passeroit à travers aucun de leurs angles, seroient avec tous les autres dans un demi-cercle, ou en moins d'un demi-cercle; ce qui est encore contre l'hypothese. Donc, &c.

III. *Lorsque ces cordons sont dirigez suivant des plans differens, & répandus en plus d'une demi-sphere, il n'y a aucun de ces plans qui prolongé ne passe entre les cordons des autres plans.*

DEMONSTRATION.

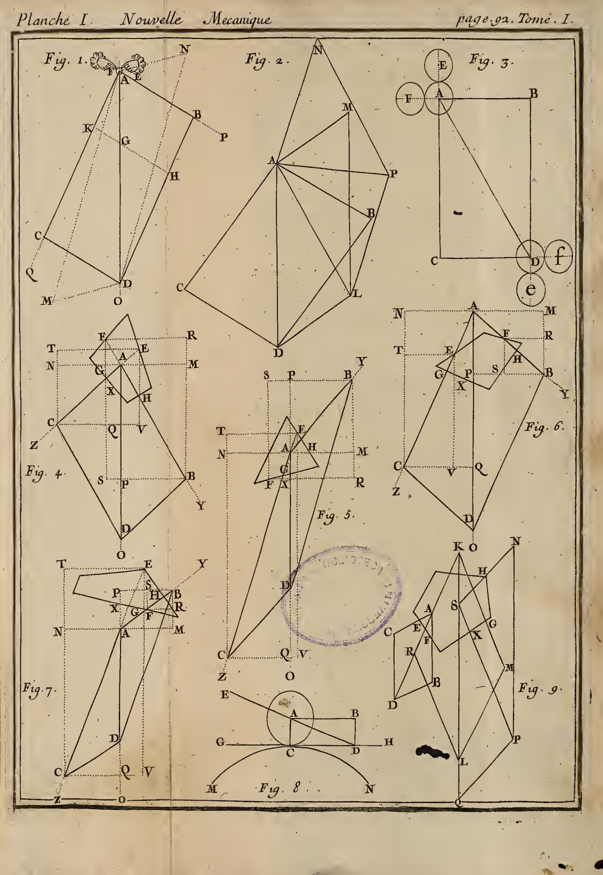
Car s'il n'y passoit pas, il seroit le plan d'un grand cercle terminant une demi-sphere, dans laquelle tous les cordons seroient répandus; ce qui est contre l'hypothese. Donc, &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

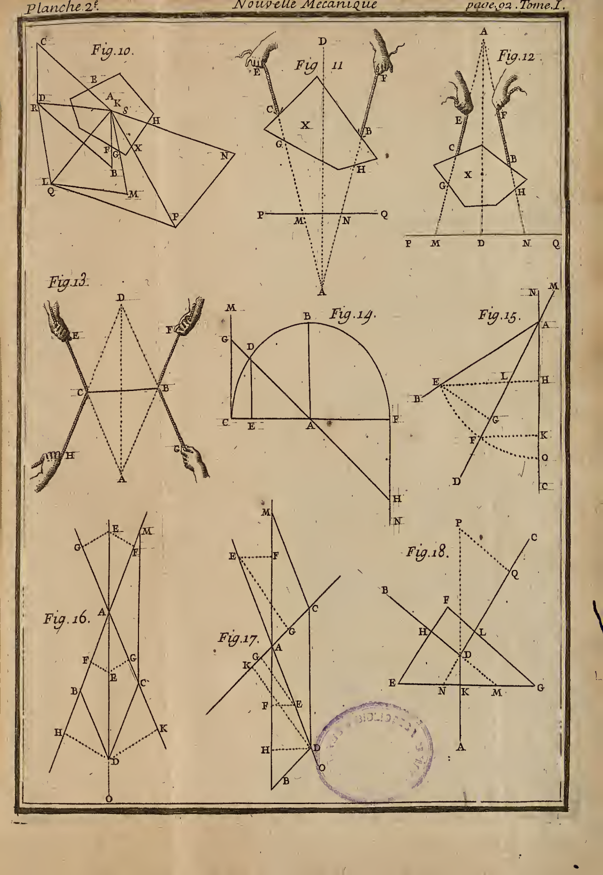
AVERTISSEMENT.

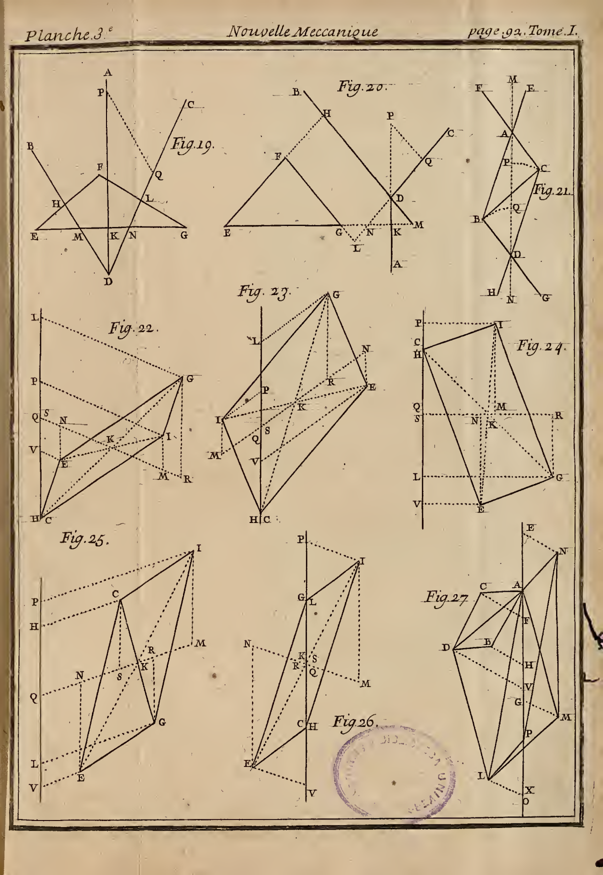
I. L'usage des Lemmes précedens se verra dans les Sections suivantes, dans lesquelles (pour la commodité des citations) les Définitions, quoique de Sections differentes, seront numerotées par des chifres de suite depuis la premiere des précedentes, jusqu'à la derniere de ce Traité-ci. Il en sera de même des Théoremes entr'eux, & des Problêmes aussi entr'eux.

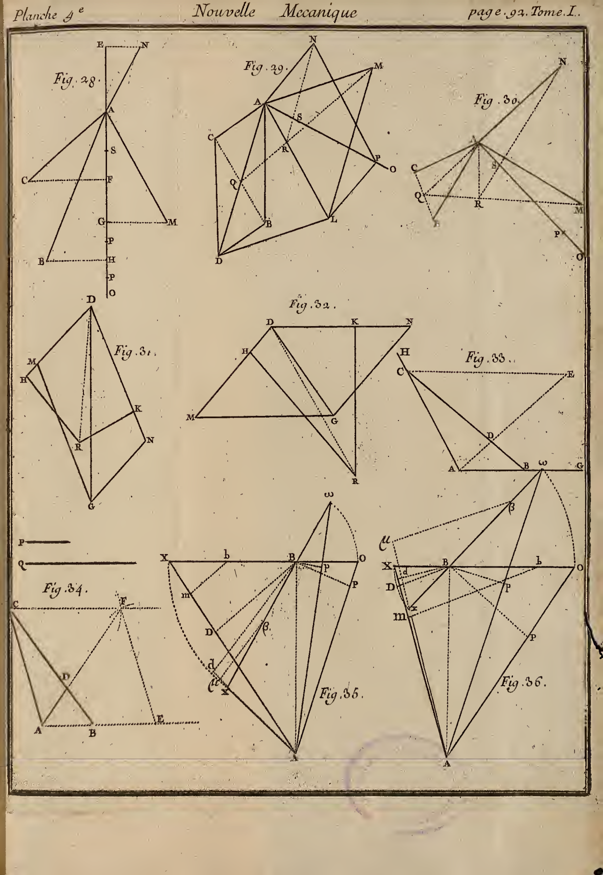
II. Les parallelogrammes qui nous vont servir à appliquer aux Machines le précedent principe general, & qui par le moyen des rapports de leurs côtez entr'eux, & à leurs diagonales, nous serviront à trouver ceux que des puissances en équilibre sur ces Machines, doivent avoir entr'elles, & à la charge qui en doit résulter à ces

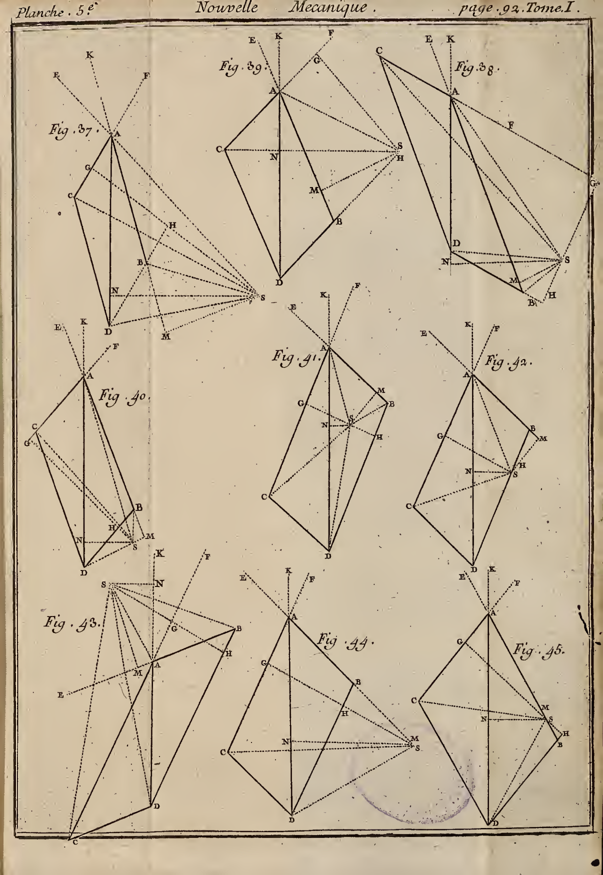
Machines : ces parallelogrammes, di-je, ayant (*Lem.* 8. *Corol.* 2. 3.) leurs côtez & leurs diagonales en raison des sinus des angles qui leur sont opposez, nous exprimerons aussi ces rapports de puissances & de charges des Machines par ceux de ces sinus, dont nous nous servirons souvent, sans même faire mention des parallelogrammes, que pour arriver à ces sinus, tant pour la simplicité des Figures & des Démonstrations, que parce que le calcul dans les Machines est beaucoup plus facile & plus expeditif par les sinus que par les côtez & diagonales des parallelogrammes, dont on ne connoît presque jamais les rapports que par le moyen de ceux de ces sinus, qui pour cela seront, dis-je, souvent substituées dans la suite à ces côtez & à ces diagonales de parallelogrammes, sans en faire quelquefois aucune mention. Cependant si l'on veut restituer les parallelogrammes aux endroits où nous n'employons que des sinus, sans faire aucune mention de Figures, la chose sera aisée ; par exemple, dans les Figures 16. 17. si l'on veut avoir en diagonale
FIG. 16. 17. & en côtez d'un parallelogramme, les rapports qui ne seroient exprimez qu'en sinus d'angles BDC, ADC, ADB, il n'y a qu'à faire un parallelogramme ABCD d'une diagonale quelconque AD prise sur la ligne qui divise à volonté l'angle total BDC en deux autres partiaux ADC, ADB, & qui ait ses côtez AB, AC, sur ceux de cet angle total BDC, & alors on aura (*Lem.* 8. *Corol.* 4.) la diagonale AD, & les côtez AB, AC, de ce parallelogramme ABDC, en raison des sinus des angles proposez BDC, ADC, ADB ; ausquels sinus on pourra consequemment substituer cette diagonale & ces côtez de parallelogramme pour exprimer par leurs rapports ceux qui ne l'étoient que par les rapports de ces sinus.

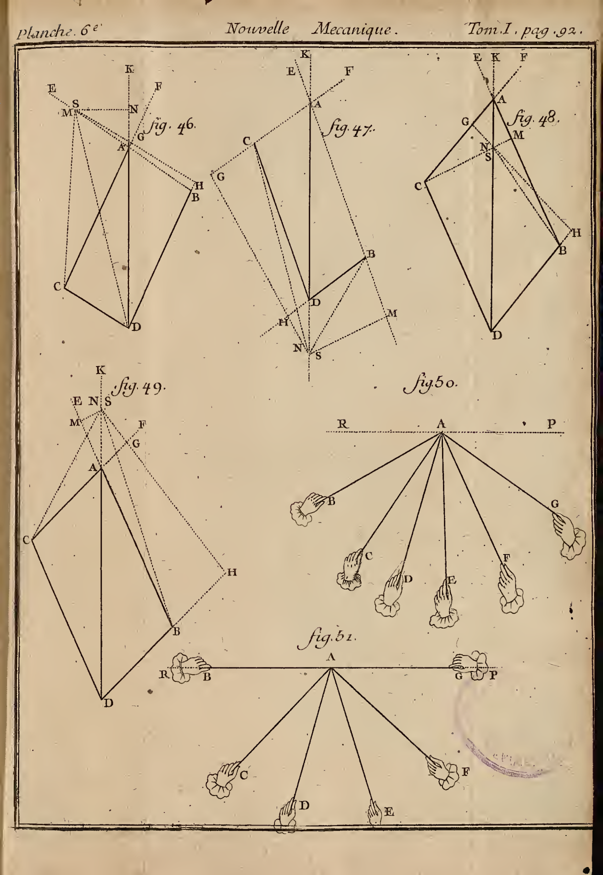

Planche I. Nouvelle Mecanique
page.92. Tome. I.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.


Fig. 10.
Fig. 11
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.


Fig. 19.
A
P
C
B
F
Q
H
L
E
M
K
N
G
D
Fig. 20.
B
H
P
C
F
Q
D
E
G
N
K
M
L
A
Fig. 21.
M
F
E
A
P
C
Q
B
D
H
N
G
Fig. 22.
L
G
P
Q
S
N
K
I
V
E
M
R
H
C
Fig. 23.
G
L
N
R
E
P
K
I
S
Q
M
V
H
C
Fig. 24.
P
I
C
H
M
Q
S
N
K
R
L
G
V
E
Fig. 25.
I
P
C
H
M
R
N
S
K
Q
G
L
E
V
P
I
G
L
N
K
S
R
Q
M
C
H
E
V
Fig. 26.
E
N
C
A
Fig. 27
F
D
B
H
V
G
M
P
L
X
O


Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.


Fig . 37 .
Fig . 38 .
Fig . 39 .
Fig . 40 .
Fig . 41 .
Fig . 42 .
Fig . 43 .
Fig . 44 .
Fig . 45 .


K
E
F
S
M
N
fig. 46.
G
A
H
B
C
D
K
E
F
A
fig. 47.
C
G
B
D
H
M
N
S
E
K
F
A
G
fig. 48.
M
N
S
C
H
B
D
K
fig. 49.
E N S
M
F
G
A
C
H
B
D
fig. 50.
R
A
P
B
G
C
D
E
F
fig. 51.
A
R
B
G
P
C
D
E
F

SECTION II.

Des Poids soûtenus avec des cordes seulement, en quelque nombre qu'elles soient, & pour tous les angles possibles qu'elles peuvent faire entr'elles.

DEFINITION XV.

LE poids K étant soûtenu avec des cordes seulement, en quelque nombre, & suivant quelques directions qu'elles soient, par les puissances P, R, &c. les parties AB, AC, &c. de ces directions ou cordes prolongées, prises depuis le point A de leur concours, en raison des puissances P, R, &c. appliquées à ces cordes, seront dans la suite simplement appellées *proportionnelles* de ces puissances. FIG. 52. 53. 54. 55. 56.

DEFINITION XVI.

Les parties AF, AE, &c. de la direction prolongée XK du poids K, comprises entre les concours A des cordes PG, RH, &c. aussi prolongées (par où l'on va voir que cette direction du poids K doit toûjours passer) & les perpendiculaires BE, CF, &c. à cette direction XK, menées des autres extrêmitez, B, C, &c. des proportionnelles AB, AC, &c. des puissances P, R, &c. seront appellées les *sublimitez* de ces puissances, lorsque ces parties AE, AF, &c. de la direction du poids K seront au dessus du poids A; & lorsque ces parties AE, AF, &c. seront au dessous de ce point A, elles seront appellées les *profondeurs* de ces mêmes puissances P, R, &c. Ce qui fera aussi appeller ces puissances *sublimes* ou *profondes*, selon qu'elles seront au dessus ou dessous de ce concours A de leurs directions; c'est-à-dire, selon qu'elles agiront de bas en haut, ou de haut en bas. Suivant ce langage AE, AF,

seront autant de sublimitez, & P, R, autant de puissances sublimes dans les Fig. 52. 55. 56. mais dans la Fig. 54. il n'y aura que AE, & P, qui le soient : AF y sera une profondeur, & R une puissance profonde. Dans la Fig. 53. il n'y aura non plus que AF de sublimitez, & R de puissances sublimes ; & cela sans aucune profondeur, la direction de la puissance P, qui y est (*Hyp.*) perpendiculaire à celle AX du poids K, y rendant AE nulle ou zero.

THEOREME I.

Fondamental de la presente Section II.

FIG. 52. 53. 54. 55. 56. I. *Lorsqu'un poids quelconque K de pesanteur dirigée suivant KX, est soûtenu seulement avec des cordes GP, HR, par deux puissances P, R, en équilibre avec lui ; les directions KX, PG, RH, de ces poids & de ces deux puissances seront toûjours en même plan ; toutes trois passeront par un même point A, ou seront paralleles entr'elles, & de maniere que la direction XK prolongée du poids, passera toûjours entre les deux autres PC, RH.*

II. *Du concours des puissances P, R, il resultera une force qui en ce cas d'équilibre sera toûjours égale au poids K, & d'une direction en ligne droite avec celle KX de ce poids.*

III. *Si sur cette direction XK prolongée, que la démonstration de la part. 1. va faire voir passer toûjours (en ce cas d'équilibre) par A à travers l'angle PAR des cordes PG, RH, aussi prolongées ; on prend dans cet angle (quel qu'il soit) depuis son sommet A, une partie quelconque AD, sur laquelle comme diagonale, on fasse un parallelogramme ABDC, qui ait pour côtez des parties AB, AC, des directions des cordes PG, RH, ou des puissances P, R, appliquées à ces cordes : le poids K sera toûjours à chacune de ces puissances P, R, supposées en équilibre avec lui, comme la diagonale AD de ce parallelogramme ABDC, sera à chacun de ses côtez AB, AC, qui leur répondent sur leurs directions.*

IV. *En ce même cas d'équilibre, si les puissances P, R, sont entr'elles comme les parties quelconques AB, AC, de*

leurs directions, ou (ce qui revient au même) si du concours A de leurs directions on en prend des parties AB, AC, qui soient entr'elles comme ces deux puissances P, R, & que de ces deux côtez AB, AC, on fasse un parallelogramme ABDC; sa diagonale AD sera toûjours en ligne droite avec la direction KX du poids K; & ce poids K sera encore alors à chacune de ces deux puissances P, R, comme cette diagonale AD du parallelogramme ABDC à chacun de ses côtez AB, AC, correspondans sur leurs directions.

V. *Reciproquement si la direction KX du poids K, prolongée vers D, passe le long du plan, par le concours A, & à travers l'angle PAR des cordes PG, HR, prolongées, ausquelles les puissances P, R sont appliquées; & que ce poids soit à chacune de ces deux puissances comme la diagonale AD du parallelogramme ABDC, fait comme dans la part. 3. sera à chacun de ses côtez AB, AC, qui leur répondent sur leurs directions; ce poids K sera pour lors en équilibre avec ces deux puissances P, R.*

VI. *Reciproquement encore si la direction KX du poids K se trouve en ligne droite avec la diagonale AD du parallelogramme ABDC, fait comme dans la part. 4. & que ce poids soit à chacune des deux puissances P, R, comme cette diagonale AD sera à chacun des côtez AB, AC, qui leur répondent sur leurs directions dans ce parallelogramme ABDC; ce poids K sera pour lors en équilibre avec ces deux puissances P, R.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Le Corol. 15. du Lem. 3. fait voir que dans l'équilibre ici supposé, la direction KX du poids K doit toûjours passer le long du plan de celles PG, RH, des puissances P, R, par leur point de concours A, à travers l'angle PAR qu'elles font entr'elles; & les Corol. 2. 3. du Lem. 6. font voir que lorsque cet angle sera infiniment aigu par l'éloignement infini de son sommet A, ces trois directions KX, PG, RH, seront paralleles entr'elles dans le même plan, & dans le même ordre qu'au-

paravant. Donc en ce cas d'équilibre ces directions seront toutes trois en même plan, par un même point, ou paralleles entr'elles ; & celle KX du poids K sera toûjours entre les deux autres PG, RH. *Ce qu'il falloit* 1° *démontrer.*

PART. II. Le nomb. 1. du Corol. 1. du Lemme 3. fait voir que du concours des puissances P, R, il doit resulter au point A, & consequemment aussi au corps K une force nouvelle suivant quelque ligne AD qui passe par A à travers l'angle PAR compris entre les directions de ces deux puissances, suivant laquelle ligne AD ce corps seroit tiré par le concours de ces deux puissances, de même que si au lieu de l'être par elles ensemble, il ne l'étoit en même sens suivant cette ligne AD, que par une puissance égale à la force resultante du concours de ces deux-là ; & que ce corps ainsi tiré se meuvroit effectivement (*Ax.* 2.) suivant cette ligne de A vers D, si quelqu'autre force ou résistance ne s'y opposoit. Donc n'y ayant ici (*Hyp.*) que la pesanteur de ce poids K qui s'y oppose, non seulement cette direction AD de la force resultante du concours des deux puissances P, R, dans l'équilibre ici supposé, doit être (*Lem.* 3. *Corol.* 2. *nomb.* 1.) en ligne droite avec la direction KX du poids K, ou de sa pesanteur ; mais encore cette force doit (*Lem.* 3. *Corol.* 2. *nomb.* 3.) être égale à cette pesanteur ; c'est-à-dire *Lem.* 3. *Corol.* 2.) être égale & directement opposée à cette même pesanteur. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

PART. III. Puisque le poids K est (*Hyp.*) soûtenu par le concours des puissances P, R, &c. en équilibre avec elles, les nomb. 1. 2. 3. du Corol. 2. du Lem. 3. font voir que sa pesanteur doit être égale à la force resultante (*Lem.* 3. *Corol.* 1. *nomb.* 1.) de leur concours d'action contre lui, & être dirigée suivant la même ligne que cette force en sens directement contraire : de sorte que la pesanteur de ce poids étant (*part.* 1.) dirigée suivant DA, la force resultante du concours d'action des puissances P, R, contre lui, sera aussi dirigée suivant la mê-

me

me diagonale AD du parallelogramme ABDC. Par consequent cette force ou impression resultante du concours de ces deux puissances P, R, sera non seulement égale & directement opposée à la pesanteur du poids K, mais encore (*Lem.* 3. *Corol.* 5.) elle sera à chacune de ces mêmes puissances P, R, comme la diagonale AD du parallelogramme ABDC est à chacun de ses côtez AB, AC, qui leur répondent sur leurs directions. Donc aussi le poids K ou sa pesanteur sera de même ici à chacune de ces deux puissances P, R, comme cette diagonale AD est à chacun des côtez AB, AC, qui leur répondent dans le parallelogramme ABDC. *Ce qu'il falloit* 3°. *démontrer.*

PART. IV. Puisque (*Hyp.*) P. R :: AB. AC. la direction de la force résultante du concours de ces deux puissances P, R, doit être (*Lem.* 3. *Corol.* 1. *nomb.* 1.) de A vers D suivant la diagonale AD du parallelogramme ABDC. Or dans le cas d'équilibre ici supposé, cette direction doit être (*part.* 1.) en ligne droite avec celle KX du poids K. Donc en ce cas d'équilibre la diagonale AD doit être sur cette direction XK prolongée du côté de K; & consequemment (*part.* 3.) le poids K doit être ici à chacune des puissances P, R, supposées en équilibre avec lui, comme la diagonale AD du parallelogramme ABDC est à chacun de ses côtez AB, AC, correspondans sur leurs directions. *Ce qu'il falloit* 4°. *démontrer.*

PART. V. Puisque (*Hyp.*) le poids K est à chacune des puissances P, R, comme la diagonale AD du parallelogramme ABDC, prise sur la direction XK prolongée de ce poids, est à chacun de ses côtez AB, AC, pris aussi sur les directions prolongées AP, AR, de ces deux puissances, par le concours, & dans le plan desquelles directions passe (*Hyp.*) celle du poids K à travers leur angle PAR; l'on aura ici P. K :: AB. AD. Et K. R :: AD. AC. Donc (en raison ordonnée) P. R :: AB. AC. Par consequent (*Lem.* 3. *Corol.* 1. *nomb.* 1. 2.) les puissances P, R, doivent tirer le poids K de A vers D suivant AD direction

N

(*Hyp.*) prolongée KX de ce poids dans le plan de leurs cordes, & d'une force contraire à la sienne, laquelle force contraire soit à chacune de ces deux puissances P, R, comme cette diagonale AD du parallelogramme ABDC est à chacun de ses côtez AB, AC, qui leur répondent. Mais la force de ce poids ou sa pesanteur est aussi (*Hyp.*) en cette même raison à chacune de ces deux puissances. Donc la pesanteur de ce poids K est ici directement contraire & égale à la force resultante du concours d'action des puissances P, R, contre lui. Par consequent (*Ax.* 3. *& Corol.* 1. *du princ. gener.*) ce poids doit ici demeurer en équilibre avec ses deux puissances. *Ce qu'il falloit* 5°. *démontrer.*

Autrement. Si le poids K ne faisoit pas ainsi équilibre avec les puissances P, R, soit en sa place tel autre poids Z qu'on voudra, qui appliqué suivant sa direction Ax contre les puissances P, R, dirigées comme ci-dessus, fasse équilibre avec elles. La part. 3. fait voir que ce nouveau poids Z seroit alors à chacune de ces puissances P, R, comme la diagonale AD du parallelogramme ABDC est à chacun de ses côtez correspondans AB, AC, sur leurs directions, c'est-à-dire (*Hyp.*) comme le poids K est à chacune de ces deux mêmes puissances P, R; & par consequent que ce poids K seroit égal à l'autre Z substitué en sa place suivant sa direction. Donc (*Ax.* 2.) ce poids K feroit pareillement équilibre ici avec les deux mêmes puissances P, R. *Ce qu'il falloit encore* 5°. *démontrer.*

PART. VI. Puisque les côtez AB, AC, du parallelogramme ABDC, sont ici (*Hyp.*) entr'eux comme les puissances P, R, sur les directions desquelles ils se trouvent, la force resultante du concours de ces deux puissances sera ici (*Lem.* 3. *Corol.* 5.) de A vers D suivant AD, & à chacune d'elles comme la diagonale AD de ce parallelogramme BC, est à chacun de ses côtez AB, AC, correspondans sur les directions de ces deux puissances P, R, c'est-à-dire (*Hyp.*) comme le poids K est à chacune

d'elles ; & consequemment ce poids K sera ici égal à cette force resultante du concours d'action de ces deux puissances P, R, contre lui. Donc la direction de cette force venant d'être trouvée de A vers D suivant AD, & celle du poids K étant (*Hyp.*) de D vers A suivant la même DA ; ce poids & cette force, c'est-à-dire, ce poids & les deux puissances P, R, du concours desquelles cette force resulte, demeureront ici (*Ax.* 3. *& Corol.* 1. *du princ. gener.*) en équilibre entr'eux. *Ce qu'il falloit* 6°. *démontrer.*

COROLLAIRE I.

En cas d'équilibre la part. 3. de ce Théoreme-ci donnant P. K :: AB. AD. Et K. R :: AD. AC. l'on aura ici (en raison ordonnée) P. R :: AB. AC. comme dans la part. 4. c'est-à-dire, les puissances P, R, entr'elles en raison des côtez AB, AC, qui leur répondent sur leurs directions dans le parallelogramme ABDC. Par consequent si d'un point quelconque L de sa diagonale AD prolongée, on mene LM, LN, perpendiculaires sur les directions AP, AR, de ces deux puissances P, R ; ces mêmes puissances seront aussi entr'elles (*Lem.* 8.) en raison reciproque de ces perpendiculaires : c'est-à-dire, P. R :: LN. LM. Ce qui donnant $P \times LM = R \times LN$, on voit qu'en cas d'équilibre entre les puissances P, R, & le poids K, les produits de ces deux puissances P, R, par les perpendiculaires LM, LN, menée de quelque point L que ce soit de la direction du poids K, sont toûjours alors égaux entr'eux.

COROLLAIRE II.

Mais en prenant AL pour le sinus total, on sçait (*Déf.* 9. *Corol.* 1.) que ces perpendiculaires LN, LM, sont les sinus des angles LAN, LAM. Donc aussi (*Corol.* 1.) les puissances P, R, sont pareillement ici en raison reciproque des sinus des angles LAM, LAN, que leurs directions AP, AR, y font avec celle AD du poids K ; & par con-

ſequent (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) ces mêmes puiſſances P, R, y ſont auſſi entr'elles en raiſon reciproque des ſinus des angles PAX, RAX, complemens chacun de chacun de ces deux-là à deux droits ; c'eſt-à-dire, que P eſt ici à R, comme le ſinus de l'angle LAN au ſinus de l'angle LAM; ou P à R, comme le ſinus de l'angle RAX au ſinus de l'angle PAX.

COROLLAIRE III.

Si pour nous exprimer plus aiſément, on ſuppoſe une troiſiéme puiſſance appellée K à la place du poids de ce nom, laquelle ſuivant la direction KX ou AD de ce poids, faſſe comme lui équilibre avec les deux P, R, qui le ſoûtiennent ; on trouvera par le Lem. 8. comme dans le Corol. 1. que ces trois puiſſances P, R, K, priſes à volonté deux à deux, ſont toûjours entr'elles en raiſon reciproque des perpendiculaires menées d'un point quelconque de la direction de la troiſiéme ſur les leurs ; c'eſt-à-dire, en raiſon reciproque des diſtances de leurs directions à quelque point que ce ſoit de celle de la troiſiéme de ces puiſſances ; & conſequemment (comme dans le Corol. 2.) que deux de ces trois puiſſances priſes ainſi à volonté, ſont toûjours entr'elles en raiſon reciproque des ſinus des angles que leurs directions font avec celle de la troiſiéme puiſſance.

On ne trace point ici les perpendiculaires mentionnées dans le précedent Corol. 3. *de peur d'embroüiller les Figures par la multiplicité des lignes, il eſt aiſé de les imaginer ſur celles du Lem.* 8.

COROLLAIRE IV.

De plus puiſque (*Corol.* 1.) en ce cas d'équilibre P. R : : AB. AC. Et R. K : : AC. AD. les trois puiſſances P, R, K, y ſeront toûjours entr'elles en raiſon des lignes AB, AC, AD, ou (à cauſe de BD=AC) en raiſon des côtez AB, BD, AD, du triangle ABD ; & conſequemment auſſi toûjours entr'elles (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) en raiſon des ſinus

des angles ADB, DAB, DBA, ou (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) des ſinus des angles DAR, DAP, PAR, ou bien auſſi (*Lem.* 8. *Corol.* 5.) des ſinus des angles RAX, PAX, PAR, complemens chacun de chacun de ceux-là à deux droits; c'eſt-à-dire, que ces trois puiſſances P, R, K, ſeront toûjours ici entr'elles en raiſon des ſinus des angles RAX, PAX, PAR, que leurs directions prolongées traverſeroient, ou traverſent en effet.

COROLLAIRE V.

D'où l'on voit que de ces trois puiſſances P, R, K, ſuppoſées en équilibre entr'elles, de quelque maniere qu'on les prenne, & quelques angles que leurs directions faiſent entr'elles; chacune ſera toûjours à chacune des deux autres, comme le ſinus de l'angle que font entre-elles les cordes ou directions de ces deux autres puiſſances, ſera à chacun des ſinus des angles que ces directions reciproquement priſes font avec la ſienne, qui (*part.* 1.) ſe trouve toûjours dans le concours de ces deux-là, & dans leur plan: par exemple, K ſera à P, comme le ſinus de l'angle PAR au ſinus de l'angle RAX, ou RAD; K ſera à R, comme le ſinus du même angle PAR au ſinus de l'angle PAX ou PAD; & conformément au Corol. 2. P ſera à R, comme le ſinus de l'angle RAX ou RAD, au ſinus de l'angle PAX ou PAD.

COROLLAIRE VI.

Si l'on imagine preſentement un autre triangle ILM de trois côtez LM, LI, MI, perpendiculaires en M, N, O, aux trois directions ou cordons prolongez AP, AR, AX, de ces trois puiſſances, P, R, K; le Corol. 8. du Lem. 8. fait voir que ces trois côtez LM, LI, MI, du triangle ILM, ſeront entr'eux comme les ſinus des angles RAX, PAX, PAR, que traverſeroient, ou que traverſent en effet les directions prolongées, auſquelles ils ſont (*Hyp.*) perpendiculaires. Donc (*Corol.* 4.) ces trois côtez LM, LI, MI, de ce nouveau triangle ILM, ſeront

auſſi entr'eux comme les trois puiſſances P, R, K, aux directions deſquelles ils ſont perpendiculaires. Par conſequent en ce cas d'équilibre,

1°. Chacune de ces trois puiſſances P, R, K, doit toûjours être plus petite que la ſomme des deux autres.

2°. Lorſque l'angle PAR devient infiniment aigu, c'eſt-à-dire (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) lorſque les directions PG, RH, des puiſſances P, R, ſe trouvent paralleles entre-elles, & conſequemment auſſi (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) paralleles à la direction AX de la puiſſance K, les angles PAD, RAD, ſe trouvant auſſi pour lors infiniment aigus; alors le complement MLI (à deux droits) de l'angle PAR, ſe trouvant (*Corol. Déf.* 11.) infiniment obtus, c'eſt-à-dire (*Déf.* 11.) ML, LI, en ligne droite, & conſequemment la droite MI confondue avec elles, & égale à leur ſomme; la puiſſance K doit auſſi pour lors être égale à la ſomme des deux autres puiſſances P, R, toûjours entr'elles, comme LM eſt à LI.

3°. Si l'angle PAR devenoit infiniment obtus, alors ſon complement MLI à deux droits ſe trouvant (*Déf.* 11. *Corol.*) infiniment aigu; & conſequemment (*Lem.* 6. *Corol* 3.) LM, LI, confondues enſemble, ſans que MI, toûjours (*Hyp.*) perpendiculaire à AX prolongée, puiſſe ſe confondre avec elles; l'on aura pour lors MI=o, & (*Lem.* 6. *Corol.* 3.) LM=LI: ainſi la puiſſance K ſera pareillement alors tout-à-fait anéantie ou nulle, & les deux autres puiſſances P, R, égales entr'elles.

4°. Donc quelles que ſoient deux puiſſances P, R, appliquées aux extrêmitez d'une corde parfaitement flexible, & quelque petite que puiſſe être la peſanteur de cette corde, ou du poids K ſuppoſé au lieu de la peſanteur de cette même corde, & de direction qui faſſe un angle avec celles des puiſſances; jamais ces deux puiſſances P, R, ne pourront bander cette corde en ligne droite, à moins qu'elles ne ſoient infinies par rapport à la peſanteur de cette corde, ou au poids K ſuppoſé à la place de cette peſanteur, ſi l'on ſuppoſe cette corde n'en point avoir,

comme on l'a supposé jusqu'ici; puisque pour la bander en ligne droite, cette pesanteur, ou ce poids K doit être nul (*nomb.* 3.) par rapport aux puissances P, R, qui appliquées l'une contre l'autre, la banderoient ainsi.

COROLLAIRE. VII.

Il suit pareillement des Corol. 4. 6. que si l'on fait séparément un triangle qui ait ses trois côtez paralleles ou perpendiculaires aux directions des trois puissances P, R, K, chacun à chacune de ces directions; ces trois côtez de ce nouveau triangle seront encore entr'eux en raison de ces trois puissances P, R, K, aux directions desquelles ils seront (*Hyp.*) tous trois paralleles ou perpendiculaires chacun à chacune; puisque ce nouveau triangle sera pour lors semblable à celui ABD du Corol. 4. ou à celui MLI du Corol. 6. selon que les trois côtez seront paralleles ou perpendiculaires aux trois directions AP, AR, AX, des trois puissances P, R, K, proportionnelles (*Corol.* 4. 6.) aux trois côtez correspondans de chacun de ces deux-ci ABD, MLI.

COROLLAIRE VIII.

Puisqu'en cas d'équilibre entre les puissances P, R, K, ces trois puissances sont entr'elles (*Corol.* 4. 6. 7.) comme les côtez AB, BD, AD, du triangle ABD du Corol. 4. & comme les correspondans de chacun des triangles des Corol. 6. 7. il est visible, que puisque chaque côté d'un triangle est toûjours plus petit que la somme des deux autres, de quelque maniere qu'on prenne ces trois puissances, chacune d'elle sera aussi toûjours plus petite que la somme des deux autres, tant que leurs directions feront angles entr'elles, ainsi qu'on l'a déja vû dans le nomb. 1. du Corol. 6.

COROLLAIRE IX.

En ce cas d'équilibre non seulement chacune des trois puissances P, R, K, est toûjours moindre (*Corol.* 8.) que

la somme des deux autres, tant que leurs directions font des angles finis quelconques entr'elles, mais encore d'autant moindre (quoiqu'en raison differente) que l'angle compris entre les directions de ces deux autres puissances, sera plus-grand: par exemple, la puissance K sera d'autant moindre que la somme des deux autres P, R, que l'angle PAR compris entre leurs directions, sera plus grand; puisqu'alors la diagonale AD du parallelogramme ABDC en sera d'autant moindre (quoiqu'en raison differente) par rapport à ses côtez AB, AC; & que (*part.* 3.) en ce cas d'équilibre la puissance K est toûjours à chacune des deux autres P, R, comme cette diagonale AD est à chacun de ses côtez correspondans AB, AC. La même chose se trouvera de même de chacune des puissances, P, R, en faisant aussi un parallelogramme qui ait sa diagonale sur la direction de cette puissance, & ses côtez sur les directions de l'autre, & de la puissance K. Ainsi il est également vrai de ces trois puissances P, R, K, que chacune d'elle est d'autant moindre (quoiqu'en raison differente) que l'angle compris entre les directions des deux autres est plus grand.

Cela suit encore du Corol. 6. du Lem. 8. & du précedent Corol. 4. Puisque (*Lem.* 8. *Corol.* 6.) plus l'angle total, par exemple, PAR sera grand, plus le rapport de son sinus à chacun des sinus des deux angles partiaux DAR, DAP, sera petit; & que suivant le précedent Corol. 4. la puissance K est toûjours ici à chacune des puissances P, R, comme le sinus de cet angle total PAR à chacun des sinus des deux partiaux DAR, DAP. Donc la puissance K sera toûjours ici d'autant moindre que la somme P+R des deux autres P, R, que l'angle PAR sera plus grand. On trouvera de même en prolongeant les directions PA, RA, de ces deux puissances-ci, à travers les angles RAX, PAX, que la puissance P sera d'autant moindre que la somme K+R des deux autres, que l'angle RAX sera plus grand; & que R sera d'autant moindre que K+P, que l'angle PAX sera aussi plus grand.

COROLLAIRE

COROLLAIRE X.

Mais si l'angle que font entr'elles les directions prolongées PG, RH, des puissances P, R, étoit infiniment aigu, & consequemment aussi les angles PAD, RAD, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol.* 1.) si ces deux directions étoient paralleles entr'elles, & ces deux puissances dirigées en même sens directement contraire à celui de la troisiéme K en équilibre (*Hyp.*) avec elles, le sinus de l'angle PAR se trouvant alors (*Lem.* 7.) seul égal à la somme des sinus des deux autres angles partiaux PAD, RAD, la puissance K ou le poids de ce nom remis à sa place, se trouveroit aussi pour lors (*Corol.* 4.) seul égal à la somme des deux autres puissances P, R, prises ensemble, ainsi qu'on l'a déja vû dans le nomb. 2. du Corol. 6. Et en tout autre cas d'équilibre, ce poids ou cette autre puissance K seroit moindre (*Corol. 6. nomb.* 1. & *Corol.* 8.) que cette somme des deux autres puissances P, R.

Cela se prouve encore par la part. 1. du Lem. 9. laquelle fait voir que lorsque l'angle PAR se trouve infiniment aigu, la diagonale AD du parallelogramme BC se trouve égale à la somme des côtez AB, AC, de ce parallelogramme. Mais la part. 3. du present Th. 1. fait voir aussi que le poids K en équilibre (*Hyp.*) avec les puissances P, R, est toûjours à chacune d'elles comme cette diagonale AD est à chacun de ces côtez AB, AC. Donc en ce cas-ci d'équilibre, & d'angle PAR infiniment aigu, ou (*Lem. 6. Corol.* 1.) de directions paralleles entr'elles, le poids K doit être seul égal à la somme des puissances P, R; & en tout autre cas d'équilibre moindre (*Corol. 6. nomb.* 1. & *Corol.* 8.) que cette somme.

Ainsi en general en cas d'équilibre entre deux puissances & un poids qu'elles soûtiennent ensemble avec des cordes seulement suivant des directions paralleles à la sienne, & toutes deux en même sens directement contraire au sien, leur somme doit toûjours être égale à la

seule pesanteur de ce poids ; & en tout autre cas d'équilibre encore (*Corol. 6. nomb.* 1. & *Corol.* 8.) toûjours plus grande.

COROLLAIRE XI.

Au contraire dans le cas où l'angle PAR seroit infiniment obtus, c'est-à-dire (*Déf.* 11.) où les directions PG, RH, des puissances P, R, seroient en ligne droite, & ces deux puissances directement contraires entr'elles.

1°. Si cette direction commune ne faisoit qu'un angle infiniment petit avec la verticale du poids K, en sorte qu'elle fût aussi verticale, & (*part.* 1. 2.) confondue avec celle-là ; alors le sinus de l'angle total PAR se trouvant (*Lem.* 7. *Corol.* 2.) égal à la difference des sinus des angles partiaux PAD, RAD, le poids K seroit aussi égal à la difference des puissances P, R, supposées en équilibre avec lui.

Cela suit encore de l'Ax. 4. en ce qu'alors ce poids d'accord avec une de ces deux puissances n'en faisant plus qu'une avec elle, directement opposée à l'autre, cette autre puissance seroit (*Ax.* 4.) égale à la somme faite de la premiere, & de ce poids ; & par consequent ce poids K seroit encore alors égal à la difference de ces deux puissances P, R.

2°. Mais si les directions de ces deux puissances rendues en ligne droite (*Déf.* 11.) par l'angle infiniment obtus PAR, font toûjours des angles finis PAD, RAD, avec celle du poids K supposé en équilibre avec ces deux puissances P, R ; alors le sinus de l'angle infiniment obtus PAR se trouvant infiniment petit, & consequemment nul par rapport aux sinus des deux autres angles PAD, RAD, supposez finis, le poids K se trouveroit aussi pour lors (*Corol.* 4.) nul par rapport aux deux puissances P, R ; lesquelles agissent alors seulement l'une contre l'autre conformément au nomb. 3. du Corol. 6. Ainsi tant qu'il reste un poids K entre ces deux puissances P, R, attaché à leurs cordes, ces deux cordes prolongées doivent toû-

jours faire entr'elles quelqu'angle fini PAR que ce ſoit, tant qu'elles en feront de finis avec la direction de ce poids K.

COROLLAIRE XII.

De-là on voit qu'il n'y a point de forces ou de puiſſances imaginables, quelque grandes qu'on les conçoive, qui, appliquées aux extrêmitez d'une corde parfaitement flexible, la puiſſent tellement bander, qu'elle devienne parfaitement droite, pour peu de peſanteur qu'on ſuppoſe à cette corde, ou ſi elle n'en avoit aucune (ainſi qu'on l'a ſuppoſé juſqu'ici, & qu'on le ſuppoſera toûjours dans la ſuite) quelque petit poids qu'on lui ſuppoſe appliqué entre ces deux puiſſances; puiſque quelque prodigieuſes qu'on les imagine (à moins qu'elles ne ſoient infiniment grandes par rapport à la peſanteur de la corde, ou du poids qui lui ſeroit appliqué, ſi elle n'en avoit aucune) elles auront toûjours quelques rapports à la peſanteur de cette corde, ou au poids qui ſeroit appliqué entre ces deux puiſſances, ſi elle n'en avoit aucune; & par conſequent cette corde ſe courbera toûjours, ainſi qu'on l'a déja vû dans le nombre 4. du Corol. 6. Et cela parce que ſi cette corde devenoit droite, les deux puiſſances qui la banderoient ainſi, n'agiroient plus du tout contre ſon poids, mais ſeulement l'une contre l'autre: raiſon aſſez à la portée du vulgaire, pour diſſiper ſeule toute la ſurpriſe où il eſt de voir qu'une corde avec laquelle pluſieurs chevaux traînent contre le courant d'une riviere un ou pluſieurs bateaux chargez, ne ſe trouve jamais en ligne droite.

COROLLAIRE XIII.

Si l'on imagine preſentement de B en C une ſeconde diagonale du parallelogramme ABDC, il eſt manifeſte (*Déf.* 13.) que le point T où cette ſeconde diagonale rencontrera la premiere AD, ſera le centre principal d'équilibre des puiſſances P, R; & qu'ainſi (conformé-

ment au Lem. 11.) AD sera double de la distance AT de ce centre T au point A de concours des directions de ces deux puissances. Mais en cas d'équilibre entre le poids K & ces deux puissances P, R, ce poids est toûjours (*part.* 3. 4.) à chacune d'elles comme AD est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC. Donc aussi en ce cas d'équilibre ce même poids K sera toûjours à chacune de ces deux puissances P, R, comme deux fois la distance AT de leur centre principal T d'équilibre au concours A de leurs directions, est à chacune de leurs mêmes proportionnelles AB, AC.

Voilà tout autant de Corollaires resultans des part. 3. 4. de ce Théoreme-ci, en voici qui resultent pareillement de ses parties 5. 6. reciproques à celles-là, sans avoir encore aucun égard à la pesanteur des cordes.

COROLLAIRE XIV.

Il suit aussi des part. 5. 6. de ce Théoreme-ci que si la direction du poids K est suivant la distance AT du centre principal T d'équilibre des puissances P, R, au concours A de leurs directions ; & que ce poids soit à chacune de ces deux puissances comme $2 \times AT$ à chacune de leurs proportionnelles AB, AC ; il y aura équilibre entre ce poids & ces deux puissances. Car le centre principal T d'équilibre de ces deux puissances P, R, étant (*Déf.* 13.) le milieu de la ligne imaginée par les extrêmitez B, C, de leurs proportionnelles AB, AC, il sera aussi le milieu de la diagonale AD du parallelogramme ABDC fait de ces deux proportionnelles ; & consequemment AT sera sur AD, & $AD = 2 \times AT$. Donc suivant l'hypothese qu'on vient de faire, la direction du poids K sera suivant AD ; & ce poids à chacune des puissances P, R, comme cette diagonale AD du parallelogramme ABDC est à chacun de ses côtez AB, AC, correspondans. Par consequent (*part.* 5. 6.) dans cette hypothese il y aura équilibre entre ce poids K, & ces deux puissances P, R.

COROLLAIRE XV.

Il ſuit pareillement des part. 5. 6. de ce Théoreme-ci, que ſi le poids K eſt à chacune des puiſſances P, R, comme le ſinus de l'angle PAR à chacun des ſinus des angles RAX, PAX, ou (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) RAD, PAD; elles le ſoûtiendront en cet état, & feront équilibre avec lui. Car ce poids K ſe trouvant alors à ces puiſſances P, R, comme le ſinus de l'angle PAR aux ſinus des angles RAD, PAD, ou (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) comme le ſinus de l'angle DBA du triangle ABD, aux ſinus de ſes deux autres angles BDA, BAD, doit être auſſi pour lors (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) à ces mêmes puiſſances, comme le côté AD de ce triangle à ſes deux autres côtez AB, BD, c'eſt-à-dire, comme la diagonale AD du parallelogramme ABDC, priſe ſur la direction de ce poids K, eſt à ſes côtez AB, AC, pris auſſi ſur les directions de ces puiſſances P, R. Par conſequent (*part.* 5. 6.) ce poids doit alors faire équilibre avec elles.

COROLLAIRE XVI.

D'où il ſuit qu'il n'y a point de puiſſance R ſi petite, qui à l'aide ſeulement d'une corde PAK, attachée par un bout à un crochet P, ne puiſſe ſoûtenir quelque grand poids K que ce ſoit (attaché à l'autre bout de cette corde) hors ſa poſition libre PF, quelqu'angle que la direction de cette puiſſance faſſe avec cette poſition libre PF, que je ſuppoſe, à l'ordinaire, toûjours parallele à la direction de ce poids, & conſequemment verticale. FIG. 57.

Pour le voir ſoit BC la direction qu'on veut donner à la puiſſance R, laquelle BC faſſe tel angle PBC qu'on voudra avec la verticale PF, ou (*Hyp.*) avec la direction du poids K, & ſur laquelle BC ſoit priſe BA à BP dans la raiſon ſuppoſée de cette puiſſance R à ce poids K: je dis que cette puiſſance R, appliquée ſuivant ſa direction BC à la corde en A, y retiendra le poids K en équilibre avec elle. Car ſi l'on imagine une parallele DC à PA, la-

quelle rencontre en D, C, les directions prolongées AK, BA, de ce poids K & de cette puissance R; l'on aura AC. AD :: AB. BP (*Hyp.*) :: R. K. Et consequemment (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) cette puissance sera à ce poids K, comme le sinus de l'angle D ou DAP au sinus de l'angle DCA, c'est-à-dire (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) comme le sinus de l'angle PAK au sinus de l'angle PAC. Donc la résistance du crochet P faisant (*Ax.* 2.) la fonction d'une troisiéme puissance qui leur seroit comme le sinus de l'angle KAC aux sinus des angles PAC, PAK; le poids K sera ainsi soûtenu en A (*Corol.* 15.) par la puissance R, quelque soit le rapport fini d'elle à lui.

Cela suit encore des Corol. 11. 12. *non seulement dans la presente hypothese des directions des graves toûjours paralleles entr'elles; mais aussi quand même elles se rencontreroient quelque part, par exemple, au centre de la Terre, par où PF passât; puisque sans cela la corde PAK de la suspension du poids K, demeureroit en ligne droite PF malgré la puissance R. Ce qui, suivant les Corol.* 11. 12. *seroit impossible.*

COROLLAIRE XVII.

Donc il n'y a point de force R, quelque petite qu'on l'imagine, & quelque soit l'angle de sa direction avec celle d'un poids suspendu à une corde; laquelle, quelque grand qu'on le suppose, ne soit capable de le faire sortir de la verticale PF, suivant laquelle (*Déf.* 9. & *Lem.* 3. *Corol.* 3.) ce poids se dirigeroit: & cela jusqu'à ce que les sinus des angles PAC, PAK, soient entr'eux en raison de ce poids K à cette puissance R.

COROLLAIRE XVIII.

Et parce que ce mouvement est impossible, à moins que ce poids ne monte de même que le point A de la corde, de la hauteur du sinus verse HE de l'angle APE fait par la partie AP de la corde avec la verticale AE, supposée parallele à la direction du poids; il suit évidem-

ment qu'il n'y a point de force, quelque petite qu'on l'imagine, qui ne soit capable de faire monter à cette hauteur quelque grand poids que ce soit, à l'aide seulement d'une corde attachée à quelque point fixe.

Voilà pour les directions des graves paralleles entr'elles; mais si elles concourent en quelque endroit du monde, le poids K doit monter d'une plus grande hauteur que AF, si ce concours est du côté de F; & d'une moindre, s'il est du côté de P: & ce d'autant plus ou moins grande (quoiqu'en raison differente) que l'angle de concours de la direction du poids K retenu en A, & de la verticale PF, seroit plus grand. Tout cela est clair aux moindres Géometres, même par le seul Liv. 1. des Elemens d'Euclide: c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas davantage.

COROLLAIRE XIX.

La construction du triangle MLI demeurant ici la même que dans le Corol. 6. ce Corol. 6. joint au Corollaire 5. qui le précede, fait aussi voir que si le poids K & les puissances P, R, sont entr'eux comme les côtez MI, ML, LI, de ce triangle, perpendiculaires (*Hyp.*) en O, M, N, aux directions AD, AP, AR, de ce poids & de ces deux puissances; ce poids doit demeurer en équilibre avec elles. Car le Corol. 2. du Lem. 8. faisant voir que les trois côtez MI, ML, LI, du triangle MLI, sont entr'eux comme les sinus des angles PAR, DAR, DAP, dont le premier est visiblement le complement (à deux droits) de MLI, & les deux autres égaux à LIM, LMI, chacun à chacun; l'on aura pour lors le poids K aux puissances P, R, comme le sinus de l'angle PAR est au sinus des angles DAR, DAP. Or en ce cas (*Corol.* 15.) ce poids K demeureroit en équilibre avec ces deux puissances P, R. Donc il y doit aussi demeurer, lorsque lui & elles sont entr'eux comme les côtez MI, ML, LI, du triangle MLI, perpendiculaires (*Hyp.*) à leurs directions AD, AP, AR. FIG. 52. 53. 54. 55. 56.

COROLLAIRE XX.

Il ſuit encore du Corol. 15. joint au Corol. 2. de la Déf. 9. que ſi au lieu du poids K on mettoit quelque nouvelle puiſſance, appellée auſſi K, laquelle fût aux deux puiſſances P, R, comme le ſinus de l'angle PAR aux ſinus des angles RAX, PAX; en ſorte que ces trois puiſſances K, P, R, fuſſent entr'elles comme les ſinus des trois angles PAR, RAX, PAX, au travers deſquels leurs directions ou cordes prolongées paſſeroient; elles demeureroient en équilibre entr'elles, de maniere qu'aucune d'elles ne l'emporteroit ſur aucune des deux autres.

COROLLAIRE XXI.

On voit de-là, & des précedens Corol. 14. 15. 16. 17. 18. 19. que ſans rien changer à l'inclinaiſon des cordes PG, RH, par rapport à AX, une infinité d'autres puiſſances miſes en la place des précedentes P, R, K, pourront demeurer en équilibre entr'elles trois à trois, pourvû qu'ainſi priſes trois à trois, elles ſoient entr'elles comme ces trois premieres.

COROLLAIRE XXII.

On peut auſſi en changeant l'inclinaiſon de ces cordes ou directions, conſerver l'équilibre entr'elles de ces puiſſances P, R, K, dans quatre poſitions differentes de ces mêmes cordes, ou dans trois variations differentes des angles qu'elles font entr'elles, pourvû que ces trois puiſſances faſſent échange entr'elles, juſqu'à ce que chacune d'elles ſe trouve ſucceſſivement appliquée à chacune de ces cordes dans deux ſituations differentes des deux autres. Pour voir tout cela, il n'y a qu'à s'imaginer que lorſque deux puiſſances, par exemple, P, R, dans la Fig. 54. font échange de leurs cordes, il ſe fait en même tems une échange des angles que ces mêmes cordes faiſoient auparavant avec celle de la puiſſance K, qui n'en change point alors, ſans qu'il arrive aucun changement

à

à l'angle PAR que ces deux cordes-là faisoient entr'elles: de cette maniere l'on aura deux des cas dont il est ici question. On en trouvera encore deux en concevant de même l'échange d'angles qui se fera de même dans l'échange des cordes de P & de K, sans toucher à celle de R; & encore deux pour l'échange de celles de K, R. C'est ainsi que l'on auroit six positions differentes des cordes des puissances P, R, K, sans que ces trois puissances cessassent d'être en équilibre entr'elles, si ce n'est que la premiere de ces positions, dans laquelle ces puissances étoient *(Hyp.)* d'abord en équilibre entr'elles, se trouve ici repetée trois fois; sçavoir une avec chacune des trois autres positions; ce qui en fournit trois fois deux. Ainsi il n'y en a que quatre en tout où l'équilibre se puisse conserver entre les trois puissances supposées dans l'échange de cordes & d'angles dont il s'agit ici.

COROLLAIRE XXIII.

Mais tant que chacune de ces trois puissances P, R, K, demeure appliquée à la même corde ou branche de corde, l'on ne peut en changer la direction, c'est-à-dire, l'inclinaison de ces cordes, ou leurs angles, sans rompre l'équilibre supposé entre ces puissances; puisqu'il n'est pas possible de trouver seulement deux situations d'aucune de leurs cordes, dans lesquelles les sinus des trois angles PAR, RAX, PAX, ayent les mêmes rapports entr'eux, ni consequemment les mêmes rapports que ceux des puissances K, P, R; rapports cependant necessaires *(Cor. 4.)* entre ces trois sinus pour que ces trois puissances soient en équilibre entr'elles.

COROLLAIRE XXIV.

C'est ce qui fait qu'autant de fois que l'angle PAR compris entre les cordes ou directions des puissances P, R, variera, il faudra tout autant de poids differens pour faire équilibre avec ces deux mêmes puissances. En effet plus cet angle sera grand, plus le poids K, qu'elles au-

ront à soûtenir, devra *(Corol. 9.)* être petit par rapport à elles (quoiqu'en raison differente) pour faire équilibre avec elles : de sorte qu'on peut faire cet angle PAR si obtus que ces deux puissances P, R, demeurant toûjours les mêmes, soûtiendront ensemble en équilibre un poids K si petit qu'on voudra, pourvû *(Corol. 6. nomb.* 1. *& Corol.* 8.*)* que la somme faite de sa pesanteur & de chacune de ces deux puissances, soit plus grande que l'autre seule, & lui moindre que ces deux ensemble. Ainsi cela se trouvant toûjours tant que ces deux puissances sont égales entr'elles, & ce poids moindre que leur somme; ce poids K peut alors diminuer à l'infini, & cependant par l'augmentation de l'angle PAR faire toûjours équilibre avec ces deux puissances P, R, quelque grandes qu'on les suppose. Mais si au contraire la pesanteur de ce poids se trouvoit seule plus grande que la somme de ces deux puissances, le nomb. 1. du Corol. 6. & le Corol. 8. font voir qu'elles ne pouroient alors le soûtenir en équilibre, quelqu'angle PAR que les directions de ces deux puissances fissent entr'elles: & si ce poids étoit seul égal à leur somme, il faudroit pour cela (*Corol.* 6. *nomb.* 2. *& Corol.* 10.) que l'angle PAR fût infiniment petit; & consequemment (*Lem.* 6. *Corol.* 2. 3. *& part.* 1.) que ces deux puissances agissent alors en même tems contre ce poids suivant des directions toutes deux paralleles à la sienne, ou confondues toutes deux avec elle. D'où l'on voit (*Corol.* 6. *nomb.* 1. 2. 3.) que depuis l'égalité de ce poids avec la somme de ces deux puissances, jusqu'à se trouver infiniment petit par rapport à elles, il pourra toûjours faire équilibre avec elles, si elles sont égales entr'elles.

COROLLAIRE XXV.

C'est ce qui peut arriver en changeant la direction de l'une & de l'autre de ces deux puissances P, R : mais à ne changer qu'une de ces directions,

1°. Si ces deux puissances sont égales, ou si étant iné-

gales entr'elles, il s'en trouve une qui ait sa direction horisontale, comme dans la Fig. 53. il est clair qu'en ne changeant la direction que d'une de ces deux puissances P, R, on changeroit aussi le rapport des sinus des angles que leurs cordes faisoient avec la direction du poids, ou si ce rapport se trouvoit encore le même, comme il peut arriver lorsque ces deux puissances sont égales entr'elles, leurs directions seroient alors en ligne droite: ainsi ces deux puissances P, R, ne pourroient plus (*Corol.* 5. & 11.) soûtenir le poids K, avec lequel on les supposoit en équilibre avant ce changement, ni aucune autre puissance de même direction que lui.

2°. Au contraire si ces deux puissances P, R, sont inégales, & qu'elles n'ayent aucune de leurs cordes ou directions qui soit horizontale; au lieu du poids K, avec lequel on les suppose en équilibre, on pourra encore leur en faire soûtenir un autre, pourvû que des directions de ces deux puissances on change tellement celle qui vers le haut fait le plus grand angle avec celle du poids K supposé en équilibre avec elles, qu'on lui en fasse faire un autre avec celle-ci, lequel soit le complement de celui-là à deux droits. Car les sinus des angles que les cordes ou directions de ces deux puissances P, R, font avec celle du poids K après un tel changement, étant encore (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) les mêmes qu'auparavant; ces deux mêmes puissances P, R, pourront encore (*Corol.* 15.) soûtenir ici un autre poids au lieu de K, auquel nouveau poids elles seront comme ces mêmes sinus reciproquement pris, au sinus de l'angle que leurs cordes ou directions y feront entr'elles; c'est-à-dire, un nouveau poids qui sera (*Cor.* 5.) à celui K qu'elles soûtenoient auparavant, comme ce dernier sinus à celui de l'angle qu'elles faisoient alors entr'elles: mais aussi par une raison toute contraire en tout autre changement d'une des directions de ces deux puissances P, R, ces deux puissances ne pourront plus rien soûtenir tant que les deux autres directions demeureront les mêmes qu'auparavant.

La raison pour laquelle on vient de demander (nomb. 2.) *que ce changement se fist dans celle des directions des puissances, qui fait le plus grand angle vers le haut avec celle du poids qu'elles soûtiennent ; c'est que si on faisoit un tel changement à l'autre de ces deux directions, l'angle qu'elles feroient entr'elles, se tourneroit alors en dessous ; ce qui détermineroit* (Lem. 3. part. 2.) *l'action de ces deux puissances à seconder la pesanteur du poids plûtôt qu'à le soûtenir.*

SCHOLIE.

I. Voilà bien des manieres de reconnoître les rapports de trois puissances supposées en équilibre entr'elles avec des cordes seulement ; & reciproquement qu'avec de tels rapports elles doivent toûjours demeurer ainsi en équilibre entr'elles. Quant à l'impossibilité de cet équilibre,

1°. Les part. 1. 2. faisant voir que lorsqu'il se trouve entre ces trois puissances, leurs directions sont toûjours toutes trois en même plan par un même point, ou paralleles entr'elles, & que chacune de ces trois puissances se trouve toûjours alors suivant la direction de la force resultante du concours des deux autres : il suit que l'équilibre seroit impossible entr'elles, s'il y manquoit quelqu'une de ces choses ; puisqu'en cas d'équilibre (*part.* 1. 2.) il n'y en manqueroit aucune.

2°. Les part. 3. 4. font voir aussi que quand il n'y manqueroit rien de tout cela, cet équilibre ne manqueroit pas d'être encore impossible, si les trois puissances n'étoient pas entr'elles comme la diagonale & les côtez du parallelogramme qui les eût sur leurs directions ; & consequemment aussi si elles n'étoient pas entr'elles comme les sinus des angles marquez dans les Corol. de ces part. 3. 4. puisque suivant ces mêmes part. 3. 4. & leurs Corollaires ces trois puissances auroient toûjours ces rapports entr'elles en cas d'équilibre.

II. Il est à remarquer en ce cas d'équilibre, que si d'un point quelconque de la direction de celle qu'on

voudra des trois puiſſances P, K, R, on mene des perpendiculaires ſur les directions des deux autres ; les produits faits de ces deux autres puiſſances multipliées chacune par celle de ces perpendiculaires, qui le ſera à ſa direction, feront toûjours égaux entr'eux. Par exemple, ſi d'un point quelconque L de la direction AD de la puiſſance ou poids K, on conçoit encore (comme dans le Corol. 1.) LM, LN, perpendiculaires aux directions AP, AR, des puiſſances P, R, ſuppoſées en équilibre avec celle-là ; l'on aura toûjours P×LM=R×LN ; puiſque ce cas d'équilibre donne toûjours (*Cor.* 1.) P.R : : LN. LM : : AB. AC (*Lem.* 9.) On démontrera de même que le produit des puiſſances K, R, multipliées par les perpendiculaires menées de tel point M qu'on voudra de la direction AP de la puiſſance P ſur les leurs, ſeront égaux entr'eux. La même choſe ſe démontrera auſſi de même des produits faits des puiſſances P, K, par les perpendiculaires menées d'un point quelconque de la direction AR de la puiſſance R ſur les leurs.

Tel eſt juſqu'ici le fondement de tout ce qui ſe peut dire des poids ſoûtenus avec des cordes ſeulement, ou des puiſſances appliquées les unes contre les autres à des cordes ſeulement : Fondement conſiſtant dans le ſeul Th. 1. dont on vient de voir la fecondité. En voici l'application à quelques autres plus compliquez ſur le même ſujet.

THEOREME II.

Les Figures demeurant ici les mêmes que dans le précedent Th. 1. ce que les puiſſances P, R, ſuppoſées en équilibre avec le poids K, ont de force ou d'action verticale pour ou contre ce poids ſuivant ſa direction KX, eſt toûjours (à parler le langage de la Déf. 15.) en raiſon de leur ſublimitez, ſi elles tirent toutes deux de bas en haut, ou en raiſon de la ſublimité de l'une à la profondeur de l'autre, ſi l'une tire de bas en haut, & l'autre de haut en bas. FIG. 52. 53. 54. 55. 56.

DEMONSTRATION.

Le parallelogramme ABDC ayant, comme dans la part. 3. du Th. 1. sa diagonale AD sur la direction prolongée XK du poids K, & ses côtez AB, AC, sur les cordes ou directions AP, AR, des puissances P, R, supposées en équilibre avec ce poids par le moyen de ces cordes; soient des angles B, C, du parallelogramme les perpendiculaires BE, CF, sur sa diagonale AD prolongée où besoin sera.

Cela fait, soient appellées E, F, les forces verticales employées selon la part. 2. du Lem. 3. par les puissances pour ou contre le poids K suivant sa direction XK. Cette même part. 2. du Lem. 3. fait voir que E, F : : AE. AF. Mais selon la Déf. 16. AE, AF, sont les sublimitez des puissances P, R, dans toutes les Figures ici supposées, excepté dans la Fig. 53. où AE est nulle, & dans la Fig. 54. où AF est la profondeur de la puissance R, & la seule AE sublimité de la puissance P. Donc en ce cas d'équilibre entre le poids K & ces deux puissances P, R, les forces verticales E, F, de ces deux puissances pour ou contre ce poids sont toûjours entr'elles en raison de leurs sublimitez AE, AF, si ces puissances tirent toutes deux de bas en haut, comme dans les Fig. 52. 53. 55. 56. ou en raison de la sublimité AE de l'une P, à la profondeur AF de l'autre R, si la premiere de ces deux puissances P, R, tire de bas en haut, & la seconde de haut en bas, comme dans la Fig. 54. *Ce qu'il falloit démontrer.*

La direction horisontale AP de la puissance P dans la Fig. 53. pouvant être également prise pour infiniment peu élevée, ou pour infiniment peu abbaissée par rapport à A, on la peut ajoûter au cas de la Fig. 54. comme on la vient d'ajoûter à celui des Fig. 52. 55. 56. la nullité de AE dans cette Fig. 53. l'y rendant également sublimité ou profondeur nulle.

COROLLAIRE I.

On voit de-là, en prolongeant CF jusqu'à la rencontre

de AP prolongée en Q, qu'en ce cas d'équilibre les forces verticales E, F, des puissances P, R, pour on contre le poids K suivant sa direction KX ou XD, sont aussi toûjours entr'elles en raison réciproque des tangentes des angles PAD, RAD, que les directions de ces puissances font avec celle de ce poids. Car venant de trouver (*Lem.* 3. *part.* 2.) E. F : : AE. AF. Et les triangles (*constr.*) semblables QAF, BAE, CDF, donnant AE. AF : : AB. AQ (le parallelogramme ABDC ayant AB=DC) : : DC. AQ : : CF. FQ. l'on aura pareillement ici E. F : : CF. FQ. Mais en prenant AE pour le rayon, la Déf. 10. avec son Corol. fait voir que CF, FQ, sont les tangentes des angles CAF, QAF, qui sont les mêmes que RAD, PAD. Donc les forces verticales E, F, des puissances P, R, pour ou contre le poids K suivant sa direction KX, ou XD, sont toûjours ici entr'elles comme les tangentes des angles RAD, PAD, c'est-à-dire, en raison reciproque des tangentes des angles PAD, RAD, que les cordes ou directions de ces deux puissances P, R, font avec la direction du poids K, ainsi qu'on le vient d'avancer.

COROLLAIRE II.

Dans les Fig. 52. 55. 56. où les puissances P, R, tirent toutes deux de bas en haut, les parties du poids K, ou de sa pesanteur, soûtenues dans ces Figures par ces puissances P, R, étant égales en pesanteur (*Lem.* 3. *Corol. nomb.* 3.) aux forces verticales E, F, directement contraires à ces pesanteurs partiales & en équilibre avec elles. Fig. 52. 55. 56.

1°. Il suit encore du present Th. 2. que ces parties du poids K, ainsi soûtenues chacune par chacune des puissances P, R, en vertu de ces efforts verticaux E, F, sont toûjours alors entr'elles comme les sublimitez AE, AF, de ces deux puissances ; & consequemment aussi comme les parties AE, ED de la diagonale AD, ou comme ses parties DF, FA : puisque les triangles égaux & semblables AFC, DEB, de même que AEB, DFC, rendent AF=ED, & AE=DF. D'où l'on voit que chacune des

perpendiculaires BE, CF, menées des extrêmitez B, C, des proportionnelles AB, AC, des puissances P, R, sur la diagonale AD du parallelogramme ABDC, divisera toûjours cette diagonale AD en raison des parties du poids K soûtenues par les puissances P, R, supposées en équilibre avec lui, ou en raison des efforts verticaux que ces deux puissances font chacune contre lui.

2°. Il suit du même Corol. 1. que ces mêmes parties du poids K soûtenues chacune par chacune des puissances P, R, en équilibre (*Hyp.*) avec lui, sont aussi toujours entr'elles en raison reciproque des tangentes des angles PAD, RAD, que les cordes ou directions de ces deux puissances P, R, font avec celle de ce poids.

COROLLAIRE III.

De plus de ce que les pesanteurs des parties du poids K soûtenues par chacune des puissances P, R, sont (*Lem.* 3. *Corol.* 2. *nomb.* 3.) égales aux forces verticales E, F, directement contraires à ces pesanteurs partiales, & en équilibre avec elles; il suit que la puissance, par exemple, P sera à la partie qu'elle soûtient de ce poids ou de sa pesanteur : : P. E (*Lem.* 3. *part.* 1.) : : AB. AE. c'est-à-dire (*Déf.* 9. *Corol.* 1.) comme le sinus total au sinus de l'angle ABE de sa direction AP avec l'horisontale BE. On trouvera de même que la puissance R est à la partie qu'elle soûtient de ce même poids K ou de sa pesanteur : : AC. AF. c'est-à-dire encore, comme le sinus total au sinus de l'angle ACF de sa direction AR avec l'horisontale CF. D'où l'on voit que chacune de ces deux puissances P, R, supposées en équilibre avec le poids K, est toûjours alors à ce qu'elle soûtient pour sa part de la pesanteur de ce poids, comme le sinus total est au sinus de l'angle que la direction de cette puissance fait avec l'horisontale.

COROLLAIRE IV.

Si l'on appelle presentement Y, Z, les parties du poids

poids K, ou de sa pesanteur, soûtenue chacune par chacune des puissances P, R, en sorte que Y+Z=K, l'on aura (*Corol.* 3.) P. Y :: AB. AE. le nomb. 1. du Corol. 2. donnera de plus AE. AF :: Y. Z. & consequemment AE. AE+AF :: Y. Y+Z :: Y. K. ou Y. K :: AE. AE+AF. Donc en raison ordonnée (entre cette derniere Analogie & la premiere) P. K :: AB. AE+AF. On trouvera de même R. K :: AC. AE+AF. Mais les triangles (*constr.*) semblables BAE, CDF, ayant AB=DC, ont aussi DF =AE. Donc P. K :: AB. DF+AF :: AB. AD. Et R. K :: AC. DF+AF :: AC. AD.

COROLLAIRE V.

Si l'angle PAR compris entre les directions des puissances P, R, étoit droit, & qu'ainsi le parallelogramme ABDC fût rectangle, par exemple, dans la Fig. 52. les angles (*Hyp.*) droits en E, rendant alors les trois triangles ABD, AEB, BED, semblables entr'eux, l'on auroit pour lors AD. AB :: AB. AE. Et AD. BD :: BD. DE. D'où resulteroit $AE=\frac{AB\times AB}{AD}$, DE ou $AF=\frac{BD\times BD}{AD}=\frac{AC\times AC}{AD}$, & de-là AE. AF :: AB×AB. AC×AC. Or suivant les noms du Corol. 4. le nomb. 1. du Corol. 2. donne en general Y. Z :: AE. AF. Donc l'on auroit ici Y. Z :: AB×AB. AC×AC. c'est-à-dire, que dans la presente hypothese de l'angle PAR droit, les parties Y, Z, que les puissances P, R, soûtiendroient du poids K en équilibre avec elles, seroient toûjours entr'elles comme les quarrez des proportionnelles AB, AC, de ces puissances P, R.

COROLLAIRE VI.

Voilà (*Corol.* 2. 3. 4. 5.) pour le cas où les puissances P, R, tirent toutes deux de bas en haut, contre le poids K en équilibre (*Hyp.*) avec elles. Mais si une d'elles, comme R dans la Fig. 54. tire de haut en bas en faveur de ce poids, & l'autre P encore de bas en haut : alors la force verticale F de la puissance R, se joignant à la pesan- FIG. 54.

teur du poids en sa faveur suivant une même direction AX, contre la seule force verticale E de la puissance P, qui par son action en sens contraire suivant cette même direction, les soûtient seule toutes deux en équilibre ; cette force verticale E, qui soûtient ainsi seule ces deux-là réunies contr'elle en sens directement contraire au sien, doit (*Lem.* 3. *Corol.* 2. *nomb.* 3.) en égaler la somme, & être E=F+K, ou E—F=K. Mais le present Th. 2. donnant E. F : : AE. AF. donne consequemment E. E—F : : AE. AE—AF. Donc E. K : : AE. AE—AF. Mais la part. 1. du Lem. 3. donne P. E : : AB. AE. Donc (en raison ordonnée) P. K : : AB. AE—AF. on trouvera de même R. K : : AC. AE—AF. Mais les triangles (*constr.*) semblables BAE, CDF, ayant AB=DC, ont aussi AE=DF. Donc P. K : : AB. DF—AF : : AB. AD. Et R. K : : AC. DF—AF : : AC. AD.

COROLLAIRE VII.

FIG. 52. 54. 55. 56. Les Corol. 4. 6. donnant P. K : : AB. AD. Et R. K : : AC. AD. dans tous les cas imaginables d'équilibre entre deux puissances P, R, avec des cordes seulement ; chacune des puissances P, R, sera toujours au poids K en équilibre (*Hyp.*) avec elles, comme chacun des côtez AB, AC, du parallelogramme ABDC, pris sur leurs directions, sera à la diagonale AD de ce parallelogramme, prise sur la direction de ce poids, ainsi qu'on l'a déja vû dans les part. 3. 4. du Th. 1. Et de-là suit encore tout ce qu'on a tiré des Corollaires de ces part. 3. 4. du Th. 1.

COROLLAIRE VIII.

Donc, puisque (*Corol.* 4.) AD=AE+AF, lorsque les puissances P, R, tirent toutes deux de bas en haut contre le poids K, comme dans les Fig. 52. 53. 55. 56. & (*Corol.* 6.) AD=AE—AF, lorsqu'une de ces puissances, comme P dans la Fig. 54. tire de bas en haut contre ce poids, & l'autre R de haut en bas en sa faveur ; ces deux puissances P, R, seront (*Corol.* 7.) à ce poids K, comme

leurs proportionnelles AB, AC, à la somme AE+AF de leurs sublimitez dans le premier cas, & comme leurs proportionnelles à la difference AE—AF, dont la sublimité de l'une surpasse la profondeur de l'autre dans le second.

COROLLAIRE IX.

Si les cordes GP, HR, des puissances P, R, étoient paralleles entr'elles, & consequemment aussi (*Theor.* 1. *part.* 1.) toutes deux paralleles à la direction XD du poids K en équilibre (*Hyp.*) avec elles; leurs sublimitez AE, AF, dans les Fig. 52. 55. 56. où la sublimité AE de P, & la profondeur AF de R dans la Fig. 54. se confondant alors avec leurs proportionnelles AB, AC.

1°. Le poids K seroit (*Corol.* 8.) à chacune de ces deux puissances P, R, comme la somme ou la difference de leurs proportionnelles seroit à chacune de ces mêmes proportionnelles correspondantes: sçavoir, comme la somme AB+AC, lorsque ces puissances tirent toutes deux de bas en haut; & comme la difference AB—AC, lorsqu'une d'elles tire de bas en haut, & l'autre de haut en bas. D'où il suit que dans ce cas de directions paralleles de deux puissances, & d'un poids en équilibre avec elles, ce poids sera toûjours égal à la somme ou à la difference de ces deux puissances, ainsi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 11.

2°. Lorsque ces puissances P, R, tirent toutes deux de bas en haut, les parties du poids K, qu'elles soûtiennent chacune pour sa part, sont entr'elles (*Corol.* 2. *nomb.* 1.) comme les proportionnelles de ces puissances; & chacune de pesanteur égale (*Corol.* 4.) à chacune de ces puissances. Ce qui suit encore immediatement de l'Ax. 4.

Voilà (Corol. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.) *pour ce qui concerne tous les cas dans lesquels les puissances P, R, tirent toutes deux de bas en haut, ou une de bas en haut, & l'autre de haut en bas; voici presentement pour le cas où une de ces puissances tire de bas en haut, & l'autre horisontalement.*

COROLLAIRE X.

FIG. 53. Lorsqu'une des deux puissances, comme R dans la Fig. 53. tire de bas en haut contre le poids K, pendant que l'autre P tire horisontalement, c'est-à-dire (*Déf.* 14.) perpendiculairement à la direction XD de ce poids supposé en équilibre avec ces deux puissances;

1°. Ce cas rendant AE=o, en ce que la perpendiculaire BE sur la diagonale AD tomberoit alors en A, la puissance P n'auroit point ici de force verticale E, ni pour ni contre le poids K suivant sa direction KX. Celà suit aussi de ce que le Corol. 1. donnant en general E. F :: CF. FQ. le cas present, qui rend FQ infinie, & conconsequemment FC nulle par rapport à elle, rendroit aussi E nulle par rapport à F, c'est-à-dire, E=o, la force verticale F de la puissance R étant finie.

2°. Cela étant, la puissance P ne soûtiendroit ici rien (*Lem.* 3. *Corol.* 2. *nomb.* 1.) de la pesanteur du poids K: elle n'y serviroit qu'à soûtenir l'effort horisontal (*Lem.* 3. *Corol.* 2. *nomb.* 1. 2.) de la puissance R, auquel cette puissance P directement opposée, & en équilibre avec lui, seroit (*Lem.* 3. *Corol.* 2. *nomb.* 3.) égale.

3°. L'effort vertical F de la puissance R, qui doit ici tirer de bas en haut, y soûtiendroit donc seul la pesanteur du poids K; & consequemment (*Lem.* 3. *Corol.* 2. *nomb.* 3.) il lui seroit égal. Ce qui suit aussi de ce que là part. 1. du Lem. 3. donnant F. R :: AF. AC. Et le Corol. 6. donnant R. K :: AC. AD. l'on auroit ici (en raison ordonnée) F. K :: AF. AD. de sorte que la construction donnant ici AF=AD, l'on y auroit aussi F=K, ainsi qu'on le vient de voir.

4°. Ayant ici AF=AD, les puissances P, R, y seront au poids K (*Corol.* 8.) comme leurs proportionnelles AB, AC, à la sublimité AF de la seconde R de ces deux puissances.

SCHOLIE.

I. Des deux forces, l'une verticale, & l'autre horisontale, dont est composée (*Lem.* 2. *Corol.* 2.) l'oblique de chacune des puissances P, R, voilà jusqu'ici l'usage de la premiere, c'est-à-dire, de la force verticale de chacune de ces deux puissances, lequel usage consiste en ce que cette force verticale est employée toute entiere contre ou pour le poids K suivant sa direction, selon que la puissance qui l'employe, tire de bas en haut, ou de haut en bas; de sorte que les forces horisontales suivant AS, AV, des puissances P, R, ne faisant ni pour ni contre la pesanteur du poids K, tout ce qui reste d'action à ces deux puissances pour soûtenir ce poids, consiste dans la somme ou dans la difference de leurs forces verticales suivant AE, AF, selon que ces mêmes puissances obliques tirent toutes deux de bas en haut, ou l'une de bas en haut plus fort que l'autre de haut en bas: & comme cette somme ou difference de forces verticales est (*Déf.* 14.) directement opposée à la pesanteur du poids K, l'égalité de cette pesanteur du poids K avec cette somme de forces verticales des puissances P, R, dans le premier cas, ou avec la difference de ces mêmes forces verticales dans le second, doit mettre (*Ax.* 3.) ce poids K en équilibre avec ces deux puissances P, R; & reciproquement s'il y a équilibre entre lui & elle, l'une ou l'autre de ces deux égalitez doit (*Ax.* 4.) s'y trouver. Tel est l'usage qu'on vient de voir des forces verticales suivant AE, AF, des puissances P, R, dans la démonstration du present Th. 2. & dans ses Corollaires. FIG. 52. 53. 54. 55. 56.

II. Pour ce qui est des forces horisontales de ces mêmes puissances P, R, si dans le plan PAR de leurs directions, par leur concours A, on fait SV horisontale, c'est-à-dire (*Déf.* 14.) perpendiculaire à la direction XD du poids K, laquelle horisontale soit rencontrée en S, V, par BS, CV, paralleles à cette direction XD; on verra (ainsi que dans la démonstration de la part. 3. du Lem. 3.)

que les forces horisontales suivant AS, AV, des puissances obliques P, R, sont directement opposées & égales entr'elles : de sorte que n'ayant rien ni pour ni contre le poids K, ne tendant ni à le faire descendre, ni à le faire monter ; tout leur emploi & tout leur usage est de s'empêcher mutuellement par leur égalité & leur directe contrarieté de le mouvoir à droit ni à gauche, ainsi qu'on vient de voir (*art.* 1.) que l'égalité & l'opposition directe de la pesanteur de ce poids avec la somme ou avec la difference des forces verticales de ces mêmes puissances obliques P, R, empêche ce poids de monter ni descendre. C'est par ce double empêchement d'aller ni à droit ni à gauche, de monter ni descendre, que se fait le repos & le parfait équilibre de ce poids K avec ces deux puissances P, R.

DEFINITION XVII.

Fig. 58. 59. Si d'un angle quelconque E d'un triangle rectiligne aussi quelconque BEC, sur le milieu H de son côté opposé BC, on mene dans la Fig. 58. une ligne droite EH, laquelle soit divisée de maniere que EA soit double de AH ; ce point A s'appelle d'ordinaire le *centre de gravité* de ce triangle. Et si dans la Fig. 59. la droite FA menée du sommet F d'une pyramide BECF à ce centre de gravité A de sa base BEC, est divisée en G, de maniere que FG soit triple de AG ; ce point G s'appelle ordinairement aussi le *centre de gravité* de cette pyramide.

Nous parlerons ici le même langage, sans cependant nous mettre encore en peine si la proprieté qu'on attribue à ces deux points A, G, d'être tels (Déf. 14.) *qu'en quelque situation que le triangle BEC seul, soit appuyé sur le premier A de ces points, & la pyramide BECF sur le second G, ces deux figures y demeureront toûjours en équilibre chacune par la seule pesanteur uniforme dans toutes ses parties, d'autres proprietez de ces points A, G, par rapport à cette Section-ci, nous engagent à en parler, & consequemment à leur donner des noms, ceux-là en valent bien d'autres.*

THEOREME III.

I. Si trois puissances P, R, K, appliquées à des cordes seulement, sont en équilibre entr'elles, leurs directions ou cordes PB, RC, KE, prolongées, se rencontreront dans le centre de gravité d'un triangle rectiligne, par les trois angles duquel elles passeront. FIG. 58.

II. *Ces cordes ou directions prolongées auront leurs parties comprises entre ce centre de gravité & ces angles, en raison de ces mêmes puissances.*

III. *Reciproquement trois puissances P, R, K, étant appliquées à trois cordes AP, AR, AK, qui passent par les trois angles B, C, E, d'un triangle rectiligne quelconque BEC, au centre A de gravité duquel soit le nœud qui retient ces trois cordes attachées ensemble; ces trois puissances P, R, K, se soûtiendront mutuellement en équilibre en cet état (de leurs cordes) si elles sont entr'elles comme les distances AB, AC, AE, de ce centre A, aux angles B, C, E, par où l'on suppose que leurs directions passent.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Puisque (*Hyp.*) les trois puissances P, R, K, sont ici en équilibre entr'elles suivant des directions differentes, la part. 1. du Th. 1. fait voir que leurs cordes PB, RC, KE, seront en même plan, & que prolongées elles s'y rencontreront toutes trois en un même point quelconque A. Cela étant, sur une d'elles, par exemple, sur KA prolongée soit prise AD à volonté, sur laquelle, comme diagonale, soit fait le parallelogramme ABDC, dont les côtez AB, AC, soient sur les deux autres directions AP, AR. Cela fait, si l'on prend AE=AD sur AK, & qu'on mene les droites BC, BE, CE, dont la premiere BC, rencontre AD en H; l'on aura 2×AH=AD (*constr.*) =AE. Donc (*Déf.* 17.) le point A est le centre de gravité du triangle BEC. Par consequent les directions ou cordes prolongées PB, RC, KE, se rencontreront toutes trois dans le centre de gravité A d'un triangle

rectiligne BEC, par les angles B, C, E, duquel elles passeront. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

PART. II. En ce cas d'équilibre entre les trois puissances P, R, K, la part. 3. du Th. 1. fait voir qu'elles sont entr'elles comme les lignes AB, AC, AD. Mais (*constr.*) AE=AD. Donc ces trois puissances P, R, K, sont aussi entr'elles comme les parties AB, AC, AE, de leurs directions, comprises entre le point A (*part.* 1.) centre de gravité du triangle BEC, & les angles B, C, E, de ce triangle, par lesquelles ces directions passent : c'est-à-dire, comme les distances de ce centre de gravité A à ces angles B, C, E. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

PART. III. Sur KA prolongée vers D soit prise AD= AE, laquelle rencontre en H le côté BC du triangle supposé BEC. Le point A étant (*Hyp.*) le centre de gravité de ce triangle, l'on aura (*Déf.* 16.) BH=HC, & AH= $\frac{1}{2}$AE (*constr.*) =$\frac{1}{2}$AD, & consequemment AH=HD. Donc en menant les droites BD, DC, le quadrilatere ABDC sera un parallelogramme qui aura sa diagonale AD à ses côtez AB, AC, comme AE est à ces mêmes côtez. Mais (*Hyp.*) AE est ici à ces côtez AB, AC, comme la puissance K est aux puissances P, R. Donc ce parallelogramme ABDC aura pareillement ici sa diagonale AD à ses côtez AB, AC, en raison de la puissance K aux deux autres P, R. Donc (*Th.* 1. *part.* 5.) ces trois puissances K, P, R, seront ici en équilibre entr'elles. *Ce qu'il falloit* 3°. *démontrer.*

COROLLAIRE.

Cette part. 3. jointe au Corol. 4. du Th. 1. fait voir en Géométrie que les distances AB, AC, AE, du centre de gravité A d'un triangle rectiligne quelconque BEC à ses angles B, C, E, sont toûjours entr'elles comme les sinus des angles EAC, EAB, BAC, que prolongées elles traverseroient : puisque trois puissances P, R, K, en raison de ces trois distances AB, AC, AE, & appliquées cha-

cune

cune contre les deux autres ſuivant ces lignes, feroient toûjours (*part.* 3.) en équilibre entr'elles; & qu'en ce cas d'équilibre entre ces trois puiſſances P, R, K, elles ſeroient auſſi toûjours entr'elles (*Th.* 1. *Corol.* 4.) comme les ſinus de ces mêmes angles EAC, EAB, BAC, que leurs directions ou cordes prolongées traverſeroient.

Voilà juſqu'ici pour trois puiſſances en équilibre avec des cordes ſeulement, ou pour des poids ainſi ſoûtenus chacun par deux puiſſances. Voici preſentement pour ceux qui le ſeroient par quelque nombre de puiſſances quelconques qu'on voudra, & de directions auſſi quelconques : le Th. 1. *en va encore être le fondement, ainſi qu'il l'a déja été des deux qui le ſuivent.*

THEOREME IV.

I. *Tant de puiſſances P, Q, R, S, &c. qu'on voudra, dirigées à volonté dans tels plans qu'on voudra auſſi, ſoûtenant en équilibre un poids quelconque K avec des cordes ſeulement attachées enſemble par un nœud commun A (la même choſe ſe dira de chacun des nœuds des cordes qui en ont pluſieurs, de chacun deſquels partent pluſieurs cordons, ou branches de corde) auquel ce poids K eſt ſuſpendu: l'effort reſultant du concours de toutes ces puiſſances contre ce poids ainſi en équilibre avec elles, ſera toûjours ſuivant la direction KA de ce même poids en ſens directement contraire, & égal à ſa peſanteur.* FIG. 60. 61. 62. 63.

II. *Ce poids K ainſi en équilibre avec toutes ces puiſſances P, Q, R, S, &c. ſera toûjours à chacune d'elles en raiſon de la diagonale du dernier des parallelogrammes faits comme dans le Corol.* 1. *du Lem.* 10. *& dans le Lem.* 11. *à chacune des proportionnelles AB, AC, AE, AF, &c. de ces mêmes puiſſances.*

III. *Ce même poids K en équilibre avec toutes ces puiſſances P, Q, R, S, &c. ſera auſſi toûjours alors à chacune d'elles comme le produit de leur nombre (quel qu'il ſoit) par la diſtance de leur centre principal d'équilibre au nœud commun A de toutes leurs cordes, eſt à chacune des proportionnelles AB, AC, AE, AF, &c. de ces mêmes puiſſances.*

IV. *Reciproquement si le poids K est à chacune de ces puissances P, Q, R, S, &c. en quelqu'une des raisons marquées dans les part. 2. 3. & qu'il soit directement contraire à l'effort resultant de leur concours ; il sera en équilibre avec elles.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Les nomb. 1. 2. 3. du Corol. 2. du Lem. 3. font voir que puisque (*Hyp.*) il y a ici équilibre entre le poids K & l'effort resultant du concours des puissances P, Q, R, S, &c. contre lui ; cet effort doit être directement contraire & égal à la pesanteur de ce poids *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

FIG. 59. 60. PART. II. Soient (comme dans le Corol. 1. du Lem. 10. & dans le Lem. 11.) les parallelogrammes ABHC, AHGE, AGDF, &c. le premier ABCH, fait de deux quelconques AB, AC, des proportionnelles aux puissances supposées ; le second AHGE, fait de la diagonale AH de celui-ci, & d'une troisiéme AE quelconque de ces proportionnelles ; le troisiéme AGDF, fait de la diagonale AG de ce second parallelogramme, & d'une quatriéme aussi quelconque AF de ces mêmes proportionnelles ; & ainsi de suite en quelque nombre qu'elles soient. Je dis donc que la diagonale du dernier de ces parallelogrammes, par exemple AD, s'il n'y en a que trois, ou que quatre puissances avec le poids, comme ici pour ne pas accabler l'esprit par la multitude des lignes, sera toûjours à chacune des proportionnelles AB, AC, AE, AF, des puissances P, Q, R, S, comme le poids K à chacune de ces puissances supposées en équilibre avec lui.

Car (*Lem.* 3. *Corol.* 10.) l'effort resultant du concours de toutes ces puissances P, Q, R, S, se fait de A vers D, suivant cette derniere diagonale AD, & est à chacune de toutes ces puissances comme cette derniere diagonale AD est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF. Or (*part.* 1.) dans l'équilibre supposé entre le poids K & ces puissances P, Q, R, S, cet effort resultant de leur concours de A vers D suivant AD, est directement

contraire & égal à la pesanteur de ce poids. Donc en ce cas d'équilibre non seulement cette derniere diagonale AD est toûjours en ligne droite avec la direction AK de ce poids; mais encore ce poids K est aussi toûjours à chacune des puissances P, Q, R, S, comme cette derniere diagonale AD est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF. La même chose se trouvera de même pour tout autre nombre de puissances ainsi en équilibre avec quelque poids que ce soit. Donc en general un poids ainsi en équilibre avec tant de puissances qu'on voudra, par le moyen de plusieurs cordons issus d'un seul nœud, sera toûjours à chacune de ces puissances comme la diagonale du dernier des parallelogrammes faits comme ci-dessus, sera à chacune de leurs proportionnelles. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PART. III. Soient encore sur les cordes ou directions AP, AQ, AR, AS, &c. des puissances P, Q, R, S, &c. en équilibre (*Hyp.*) avec le poids K, leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF, &c. Par les extrêmitez B, C, de deux quelconques AB, AC, d'entr'elles soit la droite BC, du milieu G de laquelle soit menée GE à l'extrêmité E d'une troisiéme quelconque AE de ces proportionnelles, laquelle GE soit divisée en H, de maniere qu'on ait HE. HG : : 2. 1. De ce point H à l'extrêmité F de la proportionnelle AF soit aussi menée HF, laquelle soit pareillement divisée en L, de maniere qu'on ait LF. LH : : 3. 1. Et ainsi de suite suivant les Corol. 2. 3. 4. du Lem. 11. s'il y avoit ici plus de quatre puissances avec le poids. Le Corol. 5. du même Lemme 11. fait voir que l'effort resultant du concours des quatre puissances P, Q, R, S, sera ici de A vers L suivant AL, & à chacune de ces puissances comme 4×AL est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF. Donc cet effort devant être ici (*part.* 1.) directement contraire & égal à la pesanteur du poids K (*Hyp.*) en équilibre avec lui; ce poids K sera pareillement ici à chacune des puissances P, Q, R, S, comme 4×AL est à chacune de leurs proportion- FIG. 62. 63.

nelles AB, AC, AE, AF. Or (*Déf.* 13.) L est le centre principal d'équilibre de ces quatre puissances P, Q, R, S. Donc le poids K ici (*Hyp.*) en équilibre avec elles, doit non seulement y avoir sa direction KA suivant AL; mais encore y être à chacune de ces puissances P, Q, R, S, comme le produit 4×AL de leur nomb. 4. par la distance AL de leur centre principal L d'équilibre au nœud commun A de toutes leurs cordes, est à chacune des proportionnelles AB, AC, AE, AF, de ces quatre puissances.

Les Corol. 2. 3. 4. 5. du Lem. 11. qui pour le cas de quatre puissances en équilibre avec un poids donnent ce rapport de 4×AL à leurs proportionnelles, donneroient de même le rapport de *n*×AL aux proportionnelles de tel nombre *n* de puissances qu'on voudroit ainsi en équilibre avec un poids, & ce poids dirigé suivant AL, si L étoit le centre principal d'équilibre de toutes ces puissances. Donc en general, quelque soit le nombre de puissances dirigées à volonté dans quelque nombre de plans que ce soit, lesquelles soûtiennent toutes ensemble en équilibre un poids K aussi quelconque avec des cordes seulement, qui partent toutes d'un même nœud commun A; ce poids ainsi en équilibre avec toutes ces puissances, non seulement aura sa direction suivant la ligne menée de ce point A au centre principal d'équilibre de toutes ces puissances; mais encore il sera toujours alors à chacune d'elles comme le produit de leur nombre par la distance du nœud A à leur centre principal d'équilibre, sera à chacune de leurs proportionnelles. *Ce qu'il falloit* 3°. *démontrer.*

FIG. 60. 61. 62. 63. PART. IV. Le poids K étant ici supposé aux puissances P, Q, R, S, &c. appliquées comme ci-dessus en celle qu'on voudra des raisons marquées dans les part. 2. 3, il leur sera (*Lem.* 3. *Corol.* 10. & *Lem.* 11. *Corol.* 5.) en même raison que l'effort resultant de leur concours contre lui; & par consequent ce poids sera égal à cet effort. Donc ce même poids K étant aussi (*Hyp.*) directement

contraire à ce même effort, il doit (*Ax.* 3.) demeurer en équilibre avec lui; c'est-à-dire, avec les puissances P, Q, R, S, &c. du concours desquelles cet effort résulte. *Ce qu'il falloit* 4°. *démontrer.*

COROLLAIRE I.

La part. 2. démontrée en se servant de parallelogrammes, se prouve encore par la part. 3. sans en faire aucun; & reciproquement cette part. 3. démontrée sans parallelogrammes, se prouve aussi par ceux de la part. 2. Car,

1°. Le poids K étant en équilibre comme dans le commencement des démonstrations de ces part. 2. 3. avec les quatre puissances P, Q, R, S, seulement; si l'on prend AD=4×AL sur AL prolongée dans les Fig. 62. 63. cette AD sera (*Lem.* 11.) la diagonale du dernier des parallelogrammes qui auroient été faits en A (comme dans la démonstration de la part. 2.) des proportionnelles AB, AC, AE, AF, de ces quatre puissances P, Q, R, S. Donc suivant la démonstration de la part. 3. cette derniere diagonale AD sera encore ici non seulement en ligne droite avec la direction AK du poids K; mais aussi à chacune de ces proportionnelles AB, AC, AE, AF, des puissances P, Q, R, S, comme ce poids est à chacune de ces puissances. On le déduira encore de même des Corol. 2. 3. 4. 5. du Lem. 11. pour tout autre nombre de puissances quelconques dirigées à volonté, & supposées ainsi en équilibre avec le poids K. Donc encore en général un poids quelconque ainsi soutenu en équilibre par tant de puissances aussi quelconques qu'on voudra, de directions pareillement quelconques qui rencontrent toutes celle du poids en un même nœud ou point A, sera toujours alors à chacune de ces puissances, comme la diagonale du dernier des parallelogrammes, qui seroient faits en A de la même maniere que dans la démonstration de la part. 2. seroit à chacune des proportionnelles de ces mêmes puissances. Ce qui est cette

Fig. 62. 63.

part. 2. elle-même qu'il falloit ici démontrer par la part. 3. sans faire aucun parallelogramme.

Fig. 60. 61. 2°. Le poids K étant encore en équilibre comme ci-dessus, avec les quatre puissances P, Q, R, S, si l'on prend $AL = \frac{1}{4} AD$ dans les Figures 60. 61. d'où resulte $4 \times AL = AD$; le point L ainsi pris sur la derniere diagonale AD, sera (*Déf.* 12) le centre principal d'équilibre de ces quatre puissances; & consequemment AL sera la distance de ce centre au nœud ou concours A de leurs quatre directions avec celle du poids. Or (*part.* 2.) ce poids K ainsi en équilibre avec ces quatre puissances P, Q, R, S, est à chacune d'elles comme cette derniere diagonale AD est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF. Donc ce poids K sera aussi pour lors à chacune de ces puissances P, Q, R, S, comme $4 \times AL$ (produit de leur nombre 4. par la distance AL de leur centre principal d'équilibre au point A de concours de leurs directions) sera à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF. On le trouvera de même pour tout autre nombre de puissances ainsi en équilibre avec quelque poids que ce soit. Donc en general ce poids ainsi en équilibre avec toutes ces puissances quelconques, & de directions quelconques qui rencontrent toutes celle de ce poids en un même nœud ou point A, sera toujours à chacune de ces puissances, comme le produit de leur nombre par la distance de ce point A à leur centre principal d'équilibre, sera à chacune de leurs proportionnelles. Ce qui est la partie 3. qu'il falloit ici démontrer par la part. 2. en y employant des parallelogrammes.

COROLLAIRE II.

Il suit de la part. 4. que tant de puissances données qu'on voudra, appliquées à autant de cordes retenues ensemble par un seul nœud commun, peuvent demeurer en équilibre entr'elles suivant une infinité de directions differentes pour toutes & pour chacune, excepté lorsqu'il n'y en a que trois ou deux seulement.

Car en prenant le poids K pour une puissance égale à sa pesanteur, afin de faire servir ici les Fig. 60. 61. la part. 4. fait voir que quelque soit le nombre des puissances données P, Q, R, S, &c. appliquées à autant de cordes attachées ensemble par un seul nœud commun A; toutes ces puissances seront toûjours en équilibre entre-elles tant qu'une d'elles sera à toutes les autres comme la diagonale du dernier des parallelogrammes faits (ainsi que dans la démonstration de la part. 2.) de leurs proportionnelles sera à ces mêmes proportionnelles, & qu'elle sera dirigée suivant cette diagonale à contre-sens de l'impression resultante de toutes ces autres puissances. Or pour peu d'attention qu'on fasse à la démonstration de la part. 2. on verra que cela peut arriver dans une infinité de directions differentes de toutes ces puissances, & de chacune d'elles: voici comment. FIG. 60. 61.

De toutes ces puissances données P, Q, R, S, K, &c. moins deux quelconques S, K, soient les directions AP, AQ, AR, &c. telles qu'on voudra, & dans quels plans on voudra, avec les proportionnelles AB, AC, AE, &c. des puissances P, Q, R, &c. qu'on destine à ces directions. De deux quelconques AB, AC, de ces proportionnelles soit fait le parallelogramme BACH; de sa diagonale AH, & d'une troisiéme quelconque AE de ces mêmes proportionnelles, soit fait ensuite le parallelogramme HAEG; & toûjours de même jusqu'à la derniere inclusivement des puissances qu'on vient de diriger à volonté, laquelle soit ici R. Sur la diagonale AG du dernier de ces parallelogrammes soit dans tel plan qu'on voudra qui passe par elle, un triangle ADG dont les deux côtez GD, AD, soient chacun à AB, comme chacune des deux puissances S, K, reservées pour les dernieres, est à la puissance P. Soient enfin la puissance S dirigée suivant AS parallele à GD, & la puissance K suivant DA prolongée vers K.

Cela fait, il suit de la part. 4. que toutes ces puissances P, Q, R, S, K, ainsi dirigées sont en équilibre entre-

elles ; puisque si l'on mene DF parallele à AG, & qui rencontre AS en F, cette construction donnera la puissance K dirigée suivant DA, est à chacune des autres P, Q, R, S, comme cette diagonale AD du dernier AGDF des parallelogrammes ici faits, est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF. Ce nombre arbitraire de puissances données fait voir qu'il en sera de même de tout autre nombre de puissances quelconques aussi données. Donc les directions de celles-là ayant été prises arbitrairement, à la reserve de deux qu'on voit devoir varier avec elles ; ces mêmes puissances P, Q, R, S, K, peuvent ainsi faire équilibre entr'elles suivant une infinité de directions differentes pour toutes & pour chacune d'elles. Leur nombre aussi arbitraire fait pareillement voir qu'il en sera de même de tout autre nombre de puissances données quelconques, pourvû (*Schol. du Th.* 1.) qu'il ne soit pas moindre que quatre.

Il est à remarquer que la disposition des directions arbitraires doit ici être telle que la penultiéme diagonale AG soit moindre que la somme des proportionnelles GD, AD, des deux puissances restantes S, K, & assez grande pour faire avec chacune de ces deux dernieres proportionnelles une somme plus grande que l'autre de ces mêmes proportionnelles : autrement le triangle AGD seroit impossible, & consequemment aussi l'équilibre, à l'établissement duquel il vient de nous conduire. Mais cela n'empêche pas que les puissances données P, Q, R, S, K, ne puissent être encore en équilibre entr'elles suivant une infinité de directions differentes, ainsi que dans le precedent Corol. 2. Puisqu'une infinité de directions arbitraires des puissances P, Q, R, peuvent rendre AG, telle qu'on ait à la fois $AG < GD + AD$, $AG + GD > AD$, *&* $AG + AD > GD$, *en une infinité de rapports differens ; n'y ayant pour cela qu'à ouvrir plus ou moins les angles que ces directions arbitraires feront entr'elles, ou à n'appliquer suivant ces directions que des puissances dont la somme soit plus grande que la difference des deux reservées pour les dernieres, ou enfin à faire (si l'on veut) les deux ensemble. Il en sera de même de*

tel

tel autre nombre de puiſſances quelconques qu'on voudra, plus grand que trois.

COROLLAIRE III.

Ce qu'on vient de voir de la part. 4. dans le précedent Corol. 2. ſur les Fig. 60. 61. par la voye des parallelogrammes qu'on a tenue dans la démonſtration de la part. 2. ſe peut encore déduire de cette même part. 4. ſur les Fig. 62. 63. ſans parallelogrammes, en ſuivant la voye qu'on a tenue dans la démonſtration de la part. 3.

Car ſi après avoir encore conduit à volonté dans des plans quelconques les direction AP, AQ, AR, &c. de toutes les puiſſances données P, Q, R, S, K, &c. à la reſerve de celles AS, AK, de deux quelconques S, K, de ces puiſſances, & avoir pris ſur ces directions arbitraires AP, AQ, AR, &c. depuis leur concours A, des parties AB, AC, AE, &c. proportionnelles aux puiſſances P, Q, R, &c. qu'on leur deſtine; ſoit menée par les extrêmitez B, C, de deux quelconques AB, AC, de ces proportionnelles, la droite BC; du milieu G de cette ligne ſoit enſuite menée à l'extrêmité E d'une troiſiéme quelconque AE de ces mêmes proportionnelles, une ſeconde droite GE, laquelle ſoit diviſée en H, de maniere qu'on ait EH. HG :: 2. 1. De ce point H à l'extrêmité d'une quatriéme quelconque de ces proportionnelles ſoit menée de même une troiſiéme droite, laquelle ſoit diviſée en deux parties telles que celle du côté de cette quatriéme proportionnelle ſoit à l'autre du côté de G :: 3. 1. ainſi que dans la démonſtration de la part. 3. conformément aux Corol. 2. 3. 4. du Lem. 11. quelque nombre de puiſſances données quelconques qu'on ſuppoſe juſqu'à la derniere de celles qu'on aura dirigées à volonté, laquelle eſt ici R. Enſuite ſuivant le Lem. 14. ſoient du point A menées dans quelque plan que ce ſoit, les lignes $AF = \frac{S}{P} \times AB$, $AL = \frac{K}{P} \times \frac{AB}{4}$, de maniere que la droite HF menée de H à l'extrêmité F de ces deux-là ſoit diviſée en FIG. 62. 63.

S

L par la seconde AL, en parties FL, LH, telles qu'on ait FL. LH :: 3. 1. Ce qui est facile par le Lem. 14. Après cela soient dirigées suivant AF, & suivant LA prolongée vers K, les deux puissances S, K, reservées ci-dessus pour les dernieres.

Il est visible que cette construction donnera non seulement AB, AC, AE, AF, 4×AL, en raison des puissances P, Q, R, S, K, dirigées suivant ces lignes; mais encore BG=GC, avec EH. HG :: 2. 1. Et FL. LH :: 3. 1. ainsi que dans la démonstration de la part. 3. Donc (*part.* 4.) toutes ces puissances seront ici en équilibre entr'elles : de plus les directions arbitraires de toutes, excepté des deux dernieres S, K, dont les directions doivent varier avec celles-là, font voir aussi que cet équilibre peut arriver avec une infinité de directions differentes de ces mêmes puissances. Il en sera de même de tel autre nombre de puissances données quelconques qu'on voudra, pourvû (*Schol. du Th.* 1.) qu'il ne soit pas moindre que quatre, le nombre & le rapport de celles-ci entr'elles étant pareillement arbitraire jusques-là.

Si l'on prend m pour cet autre nombre de puissances données aussi quelconques plus grand d'une unité que celui n des nomb. 1. 2. du Corol. 4. du Lem. 11. & encore S, K, pour les deux dernieres reservées comme ci-dessus; le nomb. 2. du Corol. 4. du Lem. 11. fait voir qu'il faudroit alors $AL = \frac{K}{P} \times \frac{AB}{m-1}$, & diviser la ligne HF en L, de maniere qu'on eût FL. LH :: $m-2$. 1. Ce qui dans l'exemple précedent de cinq puissances, donneroit $AL = \frac{K}{P} \times \frac{AB}{5-1} = \frac{K}{P} \times \frac{AB}{4}$, & FL. LH :: $5-2$. 1 :: 3. 1. ainsi qu'on les y vient de faire.

Si l'on fait ici la remarque qu'on a faite à la fin du Corol. 2. on verra derechef que s'il y a des directions suivant lesquelles les puissances proposées ne demeurcroient pas en équilibre entr'elles, il ne laisse pas d'y en avoir encore une infinité suivant lesquelles ces mêmes puissances y demeureroient.

COROLLAIRE IV.

La part. 4. du present Th. 4. donne encore le reciproque des deux précedens Corol. 2. 3. sçavoir, que tant de puissances quelconques qu'on voudra au-dessus de trois, successivement appliquées à autant de cordes attachées ensemble par un seul nœud commun, & de directions données à volonté, peuvent être entr'elles dans une infinité de rapports differens, & cependant faire toûjours équilibre suivant ces mêmes directions; pourvû (*Lem.* 17. *Corol.* 2.) que ces directions soient répandues en plus d'un demi-cercle ou d'une demi-sphere, dont le nœud commun de ces cordons soit le centre, & que pour le cas de quatre cordons leurs directions données soient toutes en même plan: tous les autres cas de plus de quatre cordons les auront en tels plans qu'on voudra, ainsi qu'on le verra dans le Prob. de la Sect. IX. avec les précautions qu'il faut prendre pour trouver ce dont il s'agit ici, lesquelles nous y engageroient à une trop grande digression: c'est pour cela que nous n'y allons parler que de directions données quelconques en même plan au dessus de trois, & répandues en plus d'un demi-cercle, soient donc, par exemple, dans les Fig. 60. 61. en même plan, & répandues en plus d'un demi-cercle les directions données AP, AQ, AR, AS, AK, suivant lesquelles les cinq puissances P, Q, R, S, K, soient en équilibre entr'elles; la part. 4. fait voir, dis-je, qu'une infinité d'autres puissances cinq à cinq peuvent encore être successivement en équilibre entr'elles suivant ces mêmes directions, quoique ces nouvelles puissances de chaque fois cinq, soient entr'elles dans des rapports tout differens de ceux de celles-là, & de toute autre fois cinq.

Fig. 60. 61.

Pour le voir, sur une quelconque des directions données, par exemple, sur KA prolongée vers D, soit prise AD à volonté, & de même AF à volonté sur telle autre AS qu'on voudra de ces directions données; soit le parallelogramme AFDG, dont AD soit la diagonale; de

même ayant pris AE à volonté sur une troisiéme quelconque AR de ces directions, soit achevé le parallelogramme AEGH, dont AG soit la diagonale. Enfin (puisqu'il n'y a ici que cinq directions données) sur les deux autres directions AP, AQ, soient menées les droites HB, HC, qui leur soient reciproquement paralleles, & qui avec elles fassent le parallelogramme BACH, dont AH soit la diagonale.

Cela fait, la part. 2. fait voir que si l'on applique aux directions données AP, AQ, AR, AS, AK, autant de puissances P, Q, R, S, K, qui soient entr'elles comme AB, AC, AE, AF, AD; toutes ces puissances ainsi dirigées seront en équilibre entr'elles. Donc toutes ces proportionnelles (hors AC, AB, qui doivent varier avec les autres) étant arbitraires dans la construction précedente; toutes les puissances P, Q, R, S, K, le sont aussi, hors les deux premieres P, Q, qui doivent varier avec les autres. Donc une infinité de puissances cinq à cinq, de rapports tout differens, peuvent faire successivement équilibre entr'elles suivant les mêmes cinq directions données AP, AQ, AR, AS, AK; & ainsi de tout autre nombre de directions données, & consequemment aussi de puissances successivement requises, excepté s'il n'y en avoit que trois; car le Th. 1. fait voir que s'il n'y avoit que trois directions, ou que trois cordes de directions données, le rapport des trois puissances requises pour faire équilibre entr'elles suivant ces trois directions, seroit aussi donné, & consequemment invariable.

COROLLAIRE V.

La même chose que dans le précedent Corol. 4. se peut encore déduire de la part. 4. sans faire aucun parallelogramme. Pour cela sur une quelconque des cinq directions données AP, AQ, AR, AS, AK, par exemple, sur KA prolongée du côté A, soit prise AL à volonté, & encore AE, AF, à volonté sur deux autres quelconques AS, AR, des quatre directions restantes; soit la

FIG. 62. 63.

droite FL prolongée vers H de maniere qu'on ait FL. HL :: 3. 1. n'y ayant ici (*Hyp.*) que cinq directions données : le nomb. 1. du Corol. 4. du Lem. 11, auquel il y auroit ici une puissance à ajoûter opposée à l'impression resultante du concours de toutes les autres, fait voir que s'il y en avoit ici tel autre qu'on voudra, fait de l'unité ajoûtée au nombre quelconque n de toutes celles-là, il y faudroit FL. LH :: $m-2$. 1. Puisque le nombre de toutes ces puissances ensemble étant $m=n+1$. donne $m-2=n-1$. Après cela menez EH prolongée vers G, de maniere que vous ayez EH. HG :: 2. 1. Enfin par le point G menez (*Lem.* 13.) la droite BC telle que ce point G la divise en deux parties égales.

Cela fait, la part. 4. du present Th. 4. fait voir que si l'on applique aux directions données AP, AQ, AR, AS, AK, qui soient entr'elles comme AB, AC, AE, AF, 4×AL ; toutes ces puissances seront en équilibre entr'elles. Donc toutes ces proportionnelles AB, AC, AE, AF, 4×AL (hors AB, AC, qui doivent varier avec les autres) étant arbitraires dans la construction précedente, toutes les puissances P, Q, R, S, K, le sont aussi, hors les deux premieres P, Q, qui doivent varier avec les autres. Donc une infinité de puissances cinq à cinq, de rapports tout differens, peuvent successivement faire équilibre entr'elles suivant les mêmes cinq directions données au dessus de trois, & consequemment aussi de puissances successivement requises, ainsi qu'on l'a déja vû dans le précedent Corol. 4.

COROLLAIRE VI.

Les quatre derniers Corollaires 2. 3. 4. 5. font voir que non seulement tant de puissances données qu'on voudra au dessus de trois, appliquées à autant de cordes attachées ensemble par un nœud commun, peuvent demeurer en équilibre entr'elles suivant une infinité de directions differentes pour toutes & pour chacune, mais encore que si les directions de ces cordes sont données

répandues en plus d'un demi-cercle ou d'une demi-ſphere, dont ce nœud commun ſoit le centre : les puiſſances qui y ſeront ſucceſſivement appliquées, peuvent être entr'elles en une infinité de rapports differens, & cependant faire toûjours équilibre entr'elles ſuivant ces mêmes directions, excepté lorſqu'il n'y en a que quatre en plus d'une demi-ſphere : le premier ſe voit dans les Corol. 2. 3. le ſecond dans les Corol. 4. 5. de ſorte que ſuivant ces quatre Corollaires tant de puiſſances données qu'on voudra au deſſus de trois, peuvent faire équilibre entr'elles ſuivant autant de directions variées à l'infini ; & reciproquement tant de directions qu'on voudra étant données répandues en plus d'un demi-cercle ou d'une demi-ſphere, autant de puiſſances de rapports variez à l'infini, peuvent faire équilibre entr'elles ſuivant ces mêmes directions, excepté lorſqu'il n'y en a que quatre en plus d'une demi-ſphere, le rapport des puiſſances étant invariable en ce cas, ainſi qu'on le verra dans le Probl. 9. de la Section I.

COROLLAIRE VII.

FIG. 64. S'il n'y a que trois puiſſances P, Q, R, qui réſiſtent au poids K avec trois cordes ſeulement AP, AQ, AR, dirigées à volonté ſuivant differens plans, du nœud commun A de ces cordes auquel eſt auſſi attachée celle du poids K, ſoient priſes ſur elles des parties AB, AC, AE, proportionnelles à ces trois puiſſances P, Q, R, qui leur ſont appliquées ; de ces trois proportionnelles AB, AC, AE, comme côtez, ſoit fait le parallelepipede BACFDHEG, avec ſa diagonale AD.

1°. Il ſuit de la part. 1. de ce Théoreme-ci, que ſi le poids K demeure ainſi en équilibre avec les trois puiſſances P, Q, R, l'effort reſultant du concours de ces trois puiſſances ſera toûjours ſuivant la direction KA de ce poids en ſens contraire, & égal à ſa peſanteur. Mais le parallelogramme ABFC étant (*Hyp.*) fait de deux AB, AC, des trois proportionnelles AB, AC, AE ; & le paral-

lelogramme AEDF fait ensuite (*Hyp.*) de la diagonale AF de celui-là, & de la troisiéme proportionnelle AE; cet effort resultant du concours des trois puissances P, Q, R, contre le poids K, doit se faire (*Lem.* 3. *Corol.* 10.) de A vers D suivant la diagonale AD de ce dernier parallelogramme & tout à la fois du parallelepipede BACFDHEG, doit (en cas d'équilibre entre le poids K & les trois puissances P, Q, R,) être en ligne droite avec la direction AK du poids K, c'est-à-dire, qu'alors cette direction KA prolongée doit passer par l'angle D de ce parallelepipede.

2°. Il suit aussi de la part. 2. de ce Théoreme-ci, qu'en ce cas d'équilibre entre le poids K & les trois puissances P, Q, R, ce poids doit être à chacune de ces puissances, comme la diagonale AD du parallelepipede BACFDHEG est à chacun de ses trois côtez AB, AC, AE, pris (*Hyp.*) sur les directions de ces trois puissances; puisque l'effort resultant de leur concours contre ce poids, lui (*nomb.* 1.) est égal, & est (*Lem.* 3. *Corol.* 10.) en cette raison à chacune de ces trois puissances.

3°. Il suit reciproquement de la part. 3. de ce Théoreme-ci, que si la diagonale AD du dernier des deux parallelogrammes ABFC, AFDE, ou du parallelepipede BACFDHEG, est en ligne droite avec la direction AK du poids K, c'est-à-dire, si cette direction KA prolongée passe par l'angle D de ce parallelepipede, & que ce poids soit à chacune de ces trois puissances P, Q, R, comme la diagonale AD de ce même parallelepipede est à chacun de ses trois côtez AB, AC, AE, pris sur leurs directions; ces trois puissances soûtiendront ensemble ce poids en équilibre avec elles: puisque (*nomb.* 1.) l'effort resultant de leur concours contre ce poids, lui sera directement contraire & égal.

COROLLAIRE VIII.

Les trois puissances P, Q, R, tirant encore contre le poids K comme dans le précedent Corol. 7. avec des directions quelconques dans des plans differens, sur lesquel- Fig. 55.

les depuis le point A de leur concours, soient encore prises AB, AC, AE, AD, proportionnelles à ces puissances P, Q, R, & à ce poids K.

1°. En cas d'équilibre entr'elles & lui, sa direction passera par le centre de gravité de la base BCE d'une pyramide triangulaire BCED, qui aura ses quatre angles B, C, E, D, aux extrêmitez des proportionnelles AB, AC, AE, AD, de ces trois puissances P, Q, R, & du poids K. Car si l'on mene la droite EF par le milieu F de BC, le Corol. 5. du Lem. 11. fait voir que l'effort resultant du concours de ces trois puissances P, Q, R, doit se faire suivant une ligne AG, qui divise EF en G de maniere qu'elle rende EG. GF :: 2. 1. c'est-à-dire (*Déf.* 17.) en un point G, qui soit le centre de gravité de la base BCE de la pyramide BCED. Mais en cas d'équilibre entre le poids K & les trois puissances P, Q, R, la direction AK de ce poids, doit être (*part.* 1.) en ligne droite avec la direction AG de l'effort resultant du concours de ces mêmes puissances. Donc cette direction KA ou DA prolongée du poids K, doit alors aussi passer par le centre de gravité G de la base BCE de la pyramide BCED, & consequemment aussi (*Déf.* 17.) par le centre de gravité de cette pyramide elle-même.

2°. En ce cas d'équilibre le nœud ou point commun A des quatre cordes ou directions AP, AQ, AR, AK, des puissances P, Q, R, & du poids K, sera dans le centre de gravité de cette pyramide BCED. Car la part. 3. fait voir qu'en ce cas d'équilibre entre le poids K & les puissances P, Q, R, ce poids est à chacune d'elles comme 3×AG est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE. Mais (*Hyp.*) ce poids est aussi à chacune de ces puissances, comme AD est à chacune de ces mêmes proportionnelles correspondantes. Donc en ce cas d'équilibre l'on aura AD=3×AG; & consequemment la droite DG sera divisée en A de maniere qu'on aura AD. AG :: 3. 1. Donc cette droite passant aussi pour lors (*nomb.* 1.) par le centre de gravité de la base BEC de la pyramide BECD,

le point A sera alors (*Déf.* 7.) le centre de gravité de cette pyramide elle-même.

3°. Reciproquement si le nœud ou point commun A des cordes ou directions des puissances P, Q, R, & du poids K, est le centre de gravité de cette pyramide BECD; & que ces trois puissances & ce poids soient entr'eux comme les distances AB, AC, AE, AD, de ce centre A aux angles B, C, E, D, de cette pyramide; ces puissances P, Q, R, & ce poids K, dirigées suivant ces lignes, seront en équilibre entr'eux. Car si A est le centre de gravité de la pyramide BCED, l'on aura (*Déf.* 17.) non seulement AD. AG :: 3. 1. mais encore EG. GF :: 2. 1. Et BF=FC. Ce qui fait voir que non seulement on aura ici AD=3×AG; mais encore que G y sera (*Déf.* 13.) le centre principal d'équilibre des puissances P, Q, R, entr'elles. Or (*Hyp.*) le poids K est à chacune de ces puissances P, Q, R, comme AD est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE. Donc ce poids est aussi à chacune de ces trois puissances comme 3×AG à chacune de ces mêmes proportionnelles correspondantes. Donc sa direction AK ou AD étant ici (*Hyp.*) en ligne droite avec AG, & G étant le centre principal d'équilibre de ces trois puissances P, Q, R, entr'elles, ce poids K doit ici (*part.* 4.) demeurer en équilibre avec elles.

Cela se peut encore démontrer indépendemment de la part. 4. Car puisque l'hypothese donne ici EG. GF :: 2. 1. & BF=FC, avec AB, AC, AE, proportionnelles aux trois puissances P, Q, R, agissantes suivant ces lignes; l'effort résultant de leur concours, sera (*Lem.* 11. *Corol.* 5.) de A vers G suivant AG, & à chacune d'elles comme 3×AG à chacune de leurs proportionnelles correspondantes. Mais le poids K est aussi (*Hyp.*) à chacune de leurs trois puissances P, Q, R, comme AD est à chacune de ces mêmes proportionnelles AB, AC, AE; & de plus l'hypothese vient de donner AD=3×AG. Donc ce poids est ici égal à l'effort suivant AG, resultant du concours des trois puissances P, Q, R, Donc la

direction AK ou AD de ce poids étant ici (*Hyp.*) en ligne droite avec la direction AG de cet effort en sens contraire ; ce poids K doit ici (*ax.* 4.) demeurer en équilibre avec cet effort, c'est-à-dire, avec les trois puissances P, Q, R, du concours d'action desquelles cet effort resulte.

4°. Reciproquement encore si trois puissances quelconques P, Q, R, & un poids K aussi quelconque, font équilibre entr'eux suivant autant de cordes ou directions AP, AQ, AR, AK, qui du centre A de gravité de quelque pyramide triangulaire BCED que ce soit, passent par les quatre angles B, C, E, D, de cette pyramide ; ces trois puissances P, Q, R, & ce poids K seront entr'eux comme les distances correspondantes de ce centre A à ces quatre angles. Car si cela n'étoit pas, soit (si l'on veut) le poids K aux puissances P, Q, R, comme AD à AL, AM, AN, quels que soient ces rapports. Le nomb. 1. fait voir que dans le cas present d'équilibre entre ce poids & ces trois puissances, le nœud ou concours A de leurs cordes ou directions, se trouveroit au centre de gravité d'une pyramide triangulaire, qui auroit ses quatre angles ou ses quatre pointes aux extrêmitez D, L, M, N, de ces quatre proportionnelles. Mais on suppose ici ce nœud ou concours A des cordes ou directions des puissances P, Q, R, & du poids K, au centre de gravité de la pyramide BCED. Donc ces deux pyramides auroient le même centre de gravité A, & la même pointe D ; ce que la Déf. 17. fait voir aux moindres Géométres être impossible. Par consequent dans la presente hypothese d'équilibre entre les trois puissances P, Q, R, & le poids K, suivant des directions qui du centre de gravité A de la pyramide BCED passent par les quatre angles de cette pyramide ; il est pareillement impossible que ces trois puissances P, Q, R, & ce poids K, ne soient pas entr'eux comme les distances correspondantes AB, AC, AE, AD, de ce centre à ces angles.

Corollaire IX.

Les Corol. 2. 3. 7. font voir en Géométrie qu'il peut y avoir une infinité de parallelepipedes, dont les trois côtez contigus & la diagonale qui part du concours ou de l'angle solide fait des trois plans qui passent par ces trois côtez, seroient les mêmes dans tous. Car les puissances P, Q, R, K, supposées en raison des grandeurs données AB, AC, AE, AD, pouvant avoir une infinité de directions differentes AP, AQ, AR, AK, en differens plans, & cependant (*Corol.* 2. 3.) faire toûjours équilibre entr'elles sur le point A concours ou nœud de ces directions ou de ces cordes, sur lesquelles sont données les proportionnelles AB, AC, AE, AD; trois quelconques AB, AC, AE, de ces quatre proportionnelles pourroient être les côtez d'une infinité de parallelepipedes BACFDGEH differens selon la varieté infinie des angles qu'elles feroient alors entr'elles autour du point A dans differens plans: de sorte qu'alors la puissance K seroit aux trois autres P, Q, R, comme la quatriéme proportionnelle AD seroit à ces trois côtez AB, AC, AE; de chacun de tous ces parallelepipedes. Mais cette puissance K seroit aussi pour lors (*Corol.* 7. *nomb.* 2.) à ces trois autres P, Q, R, comme la diagonale qui passeroit par l'angle A de chacun de tous ces parallelepipedes, seroit à ces trois côtez AB, AC, AE, les mêmes pour tous. Donc la diagonale par A seroit dans tous égale à AD; & consequemment ils auroient tous la même diagonale & les mêmes côtez par ce point A. Ce qu'on voit de la proportionnelle AD par rapport aux trois autres AB, AC, AE, se démontrera de même de chacune de celles-ci par rapport à celle-là & aux deux autres. Donc il peut effectivement y avoir une infinité de parallelepipedes, dont les trois côtez contigus, & la diagonale qui passe par leur concours ou angle solide, seroient les mêmes dans tous, quelle que soit celle de ces quatre lignes FIG. 64.

données, qu'on veuille en être la diagonale commune qui passe par le concours des trois autres.

COROLLAIRE X.

Les Corol. 2. 3. 8. font voir de même en Géométrie qu'il peut aussi y avoir une infinité de pyramides triangulaires differentes, qui ayent toutes les mêmes distances de leurs quatre angles à leur centre de gravité, quelles que soient ces quatre distances données. Car les quatre Fig. 65. puissances P, Q, R, K, supposées en raison de AB, AC, AE, AD, pouvant avoir une infinité de directions differentes, & cependant (*Corol.* 2. 3.) faire toûjours équilibre entr'elles; c'est-à-dire, leurs quatre cordes ou directions AP, AQ, AR, AK, pouvant faire entr'elles une infinité d'angles differens en differens plans autour de leur nœud ou point commun A, sans cependant empêcher ces quatre puissances P, Q, R, K, de faire équilibre entr'elles; leurs mêmes proportionnelles AB, AC, AE, AD, prises sur ces directions depuis ce point A, alors fixe & immobile, pourroient alors se terminer aux quatre angles de chacune d'une infinité de pyramides BCED differentes selon la varieté infinie de ces angles autour de ce point A. Ainsi il pourroit y avoir une infinité de telles pyramides dont chacune auroit alors ces quatre proportionnelles de longueurs données, pour distances des quatre angles à ce point A. Mais (*Corol.* 8. *nomb.* 2.) ce point A seroit aussi pour lors le centre de gravité de chacune de toutes ces pyramides. Donc il peut y avoir une infinité de pyramides triangulaires differentes, lesquelles ayent cependant toutes les mêmes distances AB, AC, AE, AD, de leurs quatre angles à leur centre de gravité.

SCHOLIE.

A l'occasion des deux derniers Corol. 9. 10. voici presentement comment la Géometre seule prouve encore ce que la Mecanique vient d'y donner. Voici, dis-je,

comment on peut construire une infinité de parallelepipedes, qui ayent tous les mêmes côtez contigus avec la même diagonale menée par le concours de ces côtez ; & une infinité de pyramides triangulaires, qui ayent toutes les mêmes distances de leurs quatre angles à leur centre de gravité.

I. Pour construire une infinité de parallelepipedes differens, dont les trois côtez contigus, & la diagonale menée par leur point de concours ou angle solide, soient cependant les mêmes dans tous, par exemple, égaux dans chacun d'eux tous à quatre lignes données de grandeur V, X, Y, Z, soit un angle rectiligne quelconque BAC, dont les côtez BA, AC, soient pris égaux à deux quelconques V, X, de ces quatre lignes données ; après en avoir fait le parallelogramme BACF, soit sur la diagonale AF, dans un autre plan quelconque un triangle ADF, dont les côtez FD, AD, soient égaux aux deux autres Y, Z, de ces mêmes lignes données ; soient enfin achevez les parallelogrammes AFDE, EACG, DFCG, DFBH. FIG. 64. 66.

Cela fait, il est visible que l'on aura un parallelepipede BACFDGEH, dont les trois côtez contigus AB, AC, AE, seront égaux aux trois lignes données V, X, Y, & la diagonale AD égale à la quatriéme Z de ces mêmes lignes données. On voit de plus que la variabilité infinie de son angle arbitraire BAC, & consequemment aussi de ses autres angles, le peut varier à l'infini, sans en varier les côtez AB, AC, AE, ni la diagonale AD, c'est-à-dire, ces quatre lignes y demeurant toûjours égales aux quatre données V, X, Y, Z, chacune à chacune. Donc on peut ainsi faire une infinité de parallelepipedes differens qui auront tous les mêmes côtez contigus, & la même diagonale menée par le concours de ces côtez ; & même ces quatre lignes égales dans tout à quatre données quelconques.

II. Pour construire aussi une infinité de pyramides triangulaires differentes, dont les distances de leur cen-

tre de gravité à leurs quatre angles, soient neanmoins les mêmes dans toutes, par exemple, égales dans toutes ces pyramides à quatre lignes quelconques données V,
FIG. 66. X, Y, Z; soit encore à volonté un angle rectiligne
67. quelconque BAC, dont les côtez BA, AC, soient pris égaux à deux quelconques V, X, des quatre lignes données; après en avoir fait encore le parallelogramme BACF, soit encore aussi sur sa diagonale AF dans un autre plan quelconque le triangle ADF, dont les côtez FD, AD, soient égaux aux deux autres Y, Z, de ces quatre lignes données; enfin après avoir achevé le parallelogramme AFDE, soit prise AK=AD sur sa diagonale DA prolongée du côté de K.

Cette construction, suivant laquelle on voit que la pyramide triangulaire BCEK, dont les quatre angles seront en B, C, E, K, aura les quatre lignes AB, AC, AE, AK, égales aux quatre données V, X, Y, Z, donne aussi A pour le centre de gravité de cette pyramide. Car si l'on mene la droite BC, & par son milieu H encore une autre droite EH, laquelle rencontre en G la diagonale AD; les triangles DGE, ADH, que le parallelogramme AFDE rend semblables, donneront EG. GH :: DE. AH :: AF. AH :: 2. 1. Donc ayant déja (*Hyp.*) BH=CH, le point G sera (*Déf.* 16.) le centre de gravité de la base BCE de la pyramide BCEK; & consequemment (*Déf.* 17.) le centre de gravité de cette pyramide elle-même, sera dans la droite GK. Or les triangles (*constr.*) semblables DGE, ADH, donnent aussi DG. AG :: DE. AH :: AF. AH :: 2. 1. Et (en composant) AD. AG :: 3. 1. Mais (*constr.*) AK=AD. Donc aussi AK. AG :: 3. 1. Par consequent ayant déja G pour le centre de gravité de la base BCE de la pyramine BCEK, le point A sera aussi (*Déf.* 17.) le centre de gravité de cette pyramide elle-même. Donc les distances AB, AC, AE, AK, de ce point A aux quatre angles B, C, E, K, de cette pyramide ayant déja été trouvées égales aux quatre lignes données V, X, Y, Z; les distances de son centre de gravité à ces quatre an-

gles, seront égales à ces mêmes lignes données chacune à chacune. Or il est manifeste que la variabilité infinie de l'angle arbitraire BAC, laquelle (*constr.*) doit en produire de pareilles dans tous les angles qu'on voit autour du point A, sans rien changer aux distances AB, AC, AE, AK de lui aux quatre angles de la pyramide BCEK, doit aussi varier cette pyramide à l'infini, sans rien changer aux distances de ses angles B, C, E, K, à son centre A de gravité. Donc on peut ainsi faire une infinité de pyramides triangulaires, qui auront toutes les mêmes distances de leur centre de gravité à leurs quatre angles, & ces distances toûjours égales à quatre lignes données quelconques, chacune à chacune.

III. Il est vrai que pour les constructions précedentes (*art.* 1. 2.) il faut que la diagonale AF se trouve toûjours moindre que la somme des lignes FD, AE, c'est-à-dire, moindre que FD+AD, ou (*constr.*) Y+Z; autrement le triangle ADF seroit impossible, & consequemment aussi les parallelepipedes & les pyramides des art. 1. 2. Mais cela n'empêche pas qu'il n'en reste encore une infinité de possibles; l'accroissement continuel de l'angle arbitraire BAC pouvant diminuer à l'infini cette diagonale AF jusqu'à la rendre plus petite en une infinité de rapports que FD+AD, à moins que la difference de AB, AC, ne fût égale ou plus grande que cette somme: auquel cas il n'y auroit qu'à prendre ces côtez AB, AC, de l'angle initial arbitraire BAC, égaux aux deux moindres des quatre lignes données; ou plûtôt il n'y auroit qu'à les prendre toûjours ainsi, & alors les parallelepipedes & les pyramides des art. 1. 2. seront toûjours possibles & differens à l'infini selon la variabilité infinie de cet angle arbitraire BAC, laquelle pourra rendre AF toûjours plus petite à l'infini que FD+AD égale (*Hyp.*) à la somme des deux plus grandes des quatre lignes données. FIG. 64. 66. 67.

IV. Pour la même raison si les puissances P, Q, R, S, K, &c. appliquées aux cordes AP, AQ, AR, AS, AK, FIG. 60. 61.

&c. dans les Fig. 60. 61. du present Th. 4. étoient données en raison des parties quelconques AB, AC, AE, AF, AD, &c. de ces cordes, & qu'il s'agit de les diriger de maniere à mettre toutes ces puissances en équilibre entr'elles : quoiqu'on y pût réussir en prenant au hazard AB, AC, pour en faire le premier parallelogramme BACH; ensuite AE encore au hazard pour en faire avec AH le second parallelogramme HAEG; & ainsi des autres : il seroit cependant plus sûr, & même il le seroit toûjours de commencer par les moindres de ces proportionnelles données, & de faire leurs angles entre-elles au point A, assez grands (plus ils le seront, tant mieux) pour rendre la penultiéme diagonale moindre que la somme des deux plus grandes proportionnelles reservées pour être l'une diagonale, & l'autre un des côtez du dernier des parallelogrammes précedens, lequel doit avoir cette penultiéme diagonale pour son autre côté. Par exemple, supposé que les précedentes proportionnelles données AB, AC, AE, AF, AD, &c. soient ici rangées de maniere que les moindres y précedent par tout les plus grandes, il faudroit prendre les deux premieres, c'est-à-dire (*Hyp.*) les deux moindres AB, AC, pour en faire le premier parallelogramme BACH; de sa diagonale AH, & de la troisiéme proportionnelle AE faire le second HAEG; de sa diagonale AG, & de la quatriéme proportionnelle faire le troisiéme; & ainsi de suite jusqu'à l'antepenultiéme proportionnelle inclusivement, laquelle soit ici AE. De cette maniere la penultiéme diagonale AG sera toûjours moindre que la somme AF+AD des deux plus grandes & dernieres des cinq proportionnelles ici données, à moins qu'on n'eût pris les angles BAC, HAE, trop petits : auquel cas il n'y a qu'à les augmenter, & faire ensuite les parallelogrammes précedens, pour rendre cette penultiéme diagonale AG moindre que la somme des deux dernieres proportionnelles restantes AF, AD, ou GD, AD, en prenant GD=AF; desquelles GD, AD, & de la penultiéme dia-

gonale

gonale AG, on pourra toûjours alors faire le triangle ADG; & consequemment aussi le dernier parallelogramme AGDF, qui aura AG, AF pour côtez, & AD pour diagonale: ce qui étant, la part. 4. du present Th. 4. fait voir que les puissances données P, Q, R, S, K, seront en équilibre entr'elles en les dirigeant ainsi suivant AB, AC, AE, AF, DA; au lieu que si la penultiéme diagonale AG étoit égale ou moindre que la somme des deux dernieres proportionnelles AF, DA, le triangle ADG seroit impossible, aussi-bien que le dernier parallelogramme AGDF; & par consequent (*part.* 2. *Th*, 4.) l'équilibre entre les puissances données seroit pareillement impossible suivant les directions qu'elles auroient alors.

V. Pour appliquer aux Fig. 62. 63. ce qu'on voit des Fig. 60. 61. dans le précedent art. 4. il faut considerer dans la part. 4. du present Th. 4. que pour mettre en équilibre dans les Fig. 62. 63. les puissances données P, Q, R, S, K, dont les proportionnelles soient AB, AC, AE, AF, AD; il faut (en commençant par les premieres) que G soit le milieu de BC; que GE soit divisée en H de maniere qu'on ait EH. HG :: 2. 1. Que HE soit divisée en L, de maniere qu'on ait FL. LH :: 3. 1. Tout cela en sorte qu'il en resulte 4×AL à AB, AC, AE, AF, comme la puissance K est aux autres P, Q, R, S, & diriger ensuite la puissance K suivant LA prolongée vers K, & les autres P, Q, R, S, suivant AP, AQ, AR, AS. Donc la puissance K étant (*Hyp.*) à celles-là P, Q, R, S, comme AD est à AB, AC, AE, AF; il faut pour cet équilibre 4×AL=AD, laquelle en ligne droite avec KA, soit (*Corol.* 1.) diagonale par A du dernier des parallelogrammes faits dans le précedent art. 4. Et consequemment pour cet équilibre il faut que AL, distance (*Déf.* 13.) du nœud A au centre principal d'équilibre entre les quatre puissances P, Q, R, S, soit ici le quart de cette derniere diagonale, & que la puissance K soit suivant leur direction commune à contre-sens de FIG. 62. 63.

V.

ce qu'elles font ensemble d'effort suivant cette direction. La part. 4. du present Th. 4. fait voir qu'en general suivant le Corol 4. nomb. 2. du Lem. 11. si *m* étoit le nombre quelconque de ces puissances données, cette distance du nœud A au centre principal d'équilibre de toutes, moins une, devroit être égale à la derniere diagonale divisée par $m-1$, pour pouvoir être toutes en équilibre entr'elles autour de ce nœud commun A de leurs cordes; & consequemment dans le cas present de cinq puissances, pour leur équilibre entr'elles la distance AL doit être égale à la derniere diagonale divisée par $5-1$; c'est-à-dire, par 4, ainsi qu'on le vient de dire. Donc pour mettre ici en équilibre entr'elles tant de puissances données qu'on voudra, sans faire aucun parallelogramme, il y faut observer tout ce qu'on a marqué dans l'art. 4. pour les y mettre par le moyen des parallelogrammes; c'est-à-dire, que pour mettre plus promtement & sûrement en équilibre les puissances données P, Q, R, S, K, &c. sans faire aucun parallelogramme, il faut commencer (comme dans l'art. 4.) par les moindres d'elles, ou par les moindres de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF, &c. qu'il faut diriger toutes, hors la plus grande reservée pour la derniere, de maniere qu'elles fassent des angles assez grands entr'elles pour arriver sûrement à l'équilibre requis.

Par exemple, si dans l'ordre qu'on les voit ici, les moindres sont les premieres, en sorte que les plus grandes y soient par tout après les moindres, il faut commencer par un angle assez grand ABC fait des deux premieres AB, AC, & diviser également en G la base BC; de ce point G par l'extrêmité E de la troisiéme proportionnelle AE, mener la droite GE, qu'il faut diviser en H, de maniere qu'on ait EH.HG :: 2. 1. De ce point H par l'extrêmité F de la quatriéme proportionnelle AF, mener la droite HF, laquelle doit être divisée en L, de maniere qu'on ait FL.LH :: 3. 1. Et ainsi de suite suivant le Corol. 1. du Lem. 11. comme dans la démonstra-

tion de la part. 3. du present Th. 4. jusqu'à la plus grande exclusivement de ces proportionnelles ou puissances, reservée pour la derniere, laquelle soit ici K. Après cela il faut diriger toutes les puissances P, Q, R, S, suivant leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF, ainsi placées, & la plus grande K reservée pour la derniere, suivant LA, distance du nœud commun A de leurs cordes au dernier point L de division, lequel sera (*Déf.* 13.) le centre principal d'équilibre de toutes les puissances P, Q, R, S, hors de la derniere K : alors 4×AL se trouvant à AB, AC, AE, AF, comme la puissance K dirigée suivant LA, est aux autres puissances P, Q, R, S, dirigées suivant AP, AQ, AR, AS; la part. 4. du present Th. 4. fait voir que toutes ces puissances ainsi dirigées seront alors en équilibre entre-elles ; & ainsi de quelqu'autre nombre m de puissances données que ce soit, dirigées de maniere que le produit de $m-1$ par la distance du nœud commun A de leurs cordes au centre principal d'équilibre de toutes ces puissances, moins une, soit à chacune des proportionnelles de celles-là, comme cette exceptée est à chacune d'elles.

THEOREME V.

La construction demeurant la même que dans les démonstrations des part. 2. 3. du précedent Th. 4. si les cordes AP, AQ, AR, AS, &c. avoient chacune plusieurs branches, chacune de ces branches encore plusieurs autres, & ainsi jusqu'à tant de branches qu'on voudra de chacune d'elles ; qu'au lieu d'être tirées par les puissances P, Q, R, S, &c. comme dans ce Th. 4. leurs dernieres branches l'étoient toutes par autant d'autres puissances, en quelque nombre qu'elles fussent : Tout le contenu du précedent Th. 4. en seroit encore vrai ; sçavoir, FIG. 68. 69.

I. *Qu'en cas d'équilibre de toutes ces puissances avec le poids K, l'effort resultant de leur concours d'action contre lui, seroit toûjours suivant la direction KA de ce poids en sens contraire, & égal à sa pesanteur.*

II. *Que ce poids K ainsi soûtenu par toutes ces puissances en équilibre avec lui, seroit aussi toûjours à chacune d'elles comme la diagonale du dernier des parallelogrammes faits en A comme dans la démonstration 1. de la part. 2. du Th. 4. seroit à chacune des proportionnelles de ces mêmes puissances.*

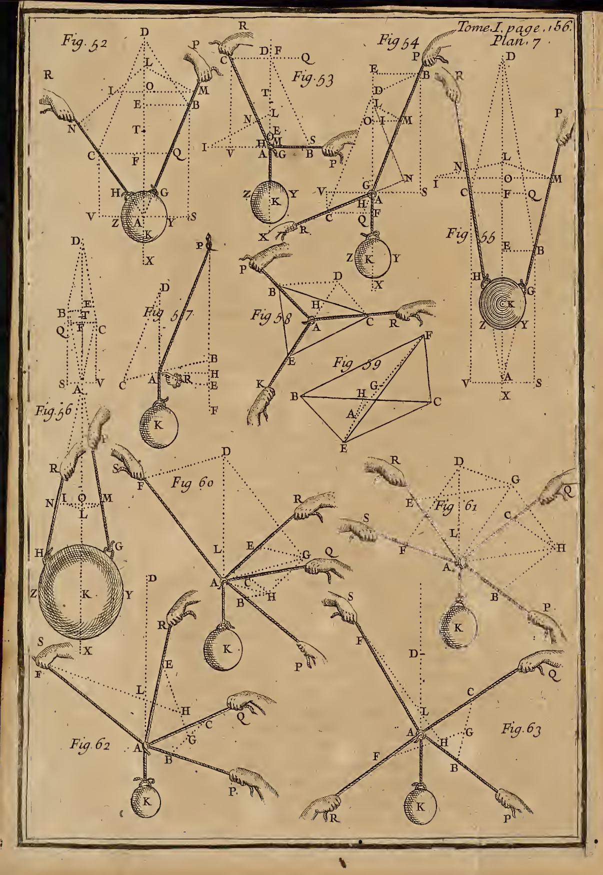
III. *Que dans cet équilibre du poids K avec toutes ces puissances, si l'on appelle* m *le nombre des cordes (quel qu'il soit) dont A est le nœud commun; ce poids K sera aussi toûjours à chacune de ces puissances, comme le produit de* m—1 *par la distance de ce nœud A à leur centre principal d'équilibre, sera à chacune de leurs proportionnelles.*

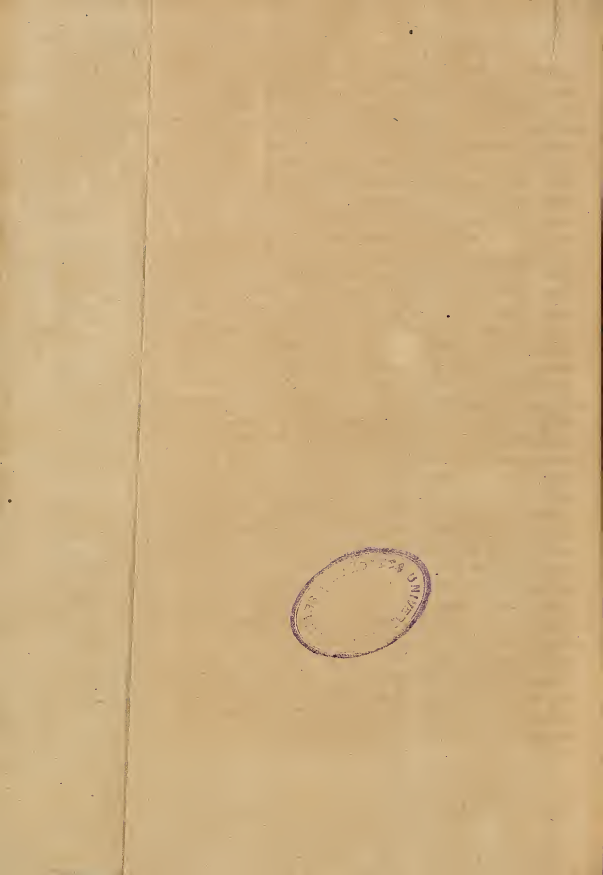
IV. *Reciproquement que si ce poids est à ces puissances en celle qu'on voudra des deux raisons ici marquées dans les part. 2. 3. & qu'il soit directement contraire à l'effort resultant de leurs concours, il sera en équilibre avec elles.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Cette part. 1. se démontrera de même que la part. 1. du Th. 4. les nomb. 1. 2. 3. du Corol. 2. du Lem. 3. faisant pareillement voir ici qu'en cas d'équilibre entre le poids K & l'effort resultant du concours de tout ce qu'il peut y avoir ici de puissances qui lui soient appliquées à l'extrêmité d'autant de branches de cordes; cet effort doit être directement contraire à ce poids, & égal à sa pesanteur. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

FIG. 68. PART. II. Si la corde, par exemple AP, avoit plusieurs branches PX, PY, PZ, &c. issues d'un même nœud P, ausquelles fussent appliquées autant de puissances X, Y, Z, &c qui fussent entr'elles comme les parties PO, PT, PV, &c. de ces branches, prises depuis leur nœud commun P; que de deux quelconques PT, PV, de ces proportionnelles on fît le parallelogramme TV; que de sa diagonale PM, & d'une troisiéme aussi quelconque PO de ces proportionnelles, on fît le parallelogramme MO; que de sa diagonale PN, & d'une quatriéme encore quelconque de ces mêmes proportionnelles, on fît de même un autre parallelogramme, & ainsi jusqu'à la derniere.


Tome.I. page.156.
Plan. 7
Fig. 52
Fig. 53
Fig 54
Fig 55
Fig. 56
Fig 57
Fig 58
Fig 59
Fig 60
Fig 61
Fig. 62
Fig. 63



Le Corol. 10. du Lem. 3. fait voir que l'effort resultant du concours des puissances X, Y, Z, &c. qui répondent à toutes ces proportionnelles PO, PT, PV, &c. doit être à chacune de ces puissances comme la diagonale du dernier des parallelogrammes précedens est à chacune de ces proportionnelles correspondantes. De sorte que s'il n'y a (comme ici) que trois puissances X, Y, Z, qui agissent ensemble sur le nœud P, l'effort resultant de leur concours sur ce nœud suivant la diagonale PN, est à chacune d'elles comme cette diagonale PN est à chacune de leurs proportionnelles PO, PT, PV. Donc la corde AP tirée par cet effort suivant cette direction PN, laquelle sera (*part.* 1.) en ligne droite avec elle, sera ainsi tirée par le concours des puissances X, Y, Z, comme (*princ. gener.*) par une seule puissance P, dirigée suivant AP, & égale à cet effort resultant du concours de celles-là, c'est-à-dire, par une puissance P, ainsi dirigée, laquelle (en prenant AB=PN) seroit à ces puissances X, Y, Z, comme AB à leurs proportionnelles PO, PT, PV. Donc aussi l'effort en A, resultant du concours des puissances X, Y, Z, Q, R, S, sera ici le même, & suivant la même direction, que celui qui y resulteroit du concours des puissances P, Q, R, S. Or en prenant AC, AE, AF, à AB, comme les puissances Q, R, S, sont à la puissance P, & en faisant ensuite les parallelogrammes qu'on voit en A, comme dans la démonstration de la part. 2. du Th. 4. Le Corol. 10. du Lem. 3. fait voir que l'effort resultant du concours de ces puissances P, Q, R, S, seroit non seulement suivant la diagonale AD du dernier AFDG de ces parallelogrammes ainsi faits en A; mais encore à chacune de ces mêmes puissances P, Q, R, S, comme cette derniere diagonale AD à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF. Donc l'effort en A, resultant du concours des puissances X, Y, Z, Q, R, S, est aussi suivant AD, & à chacune des puissances P, Q, R, S, comme AD est à AB, AC, AE, AF. Mais on vient de voir que P est à X, Y, Z, comme AB est à PO, PT, PV.

Donc l'effort A resultant du concours des puissances X, Y, Z, Q, R, S, est non seulement de A vers D suivant AD; mais encore à chacune de ces puissances comme cette diagonale AD du dernier AFDG des parallelogrammes faits en A, est à chacune de leurs proportionnelles PO, PT, PV, AC, AE, AF. Or la part. 1. fait voir qu'en cas d'équilibre entre le poids K & toutes ces puissances, l'effort resultant de leur concours lui est directement contraire & égal. Donc le poids K est aussi pour lors à chacune de ces puissances X, Y, Z, Q, R, S, comme la derniere AD des diagonales en A, est à chacune de leurs proportionnelles PO, PT, PV, AC, AE, AF.

On démontrera de la même maniere quelque nombre de branches qu'on suppose aussi aux cordes AQ, AR, AS, que le poids K en équilibre avec les puissances appliquées aux extrêmitez de ces branches, au lieu des puissances Q, R, S, & avec celles des branches de la corde AP, au lieu de la puissance P: que ce poids K (dis-je) en cas d'équilibre avec les puissances ainsi appliquées aux extrêmitez de toutes ces cordes ou branches de cordes, sera à chacune de ces puissances, comme la derniere AD des diagonales en A sera à chacune de leurs proportionnelles. On démontrera de même, quelque nombre de cordes qui partent du nœud A, quelque nombre de branches qu'elles ayent chacune, quelques branches qu'ayent encore celles-ci, & ainsi jusqu'à tant de cordes qu'on voudra faire partir du nœud A, & jusqu'à tant de branches qu'on leur voudra supposer à chacune; que le poids K en équilibre avec toutes les puissances appliquées aux extrêmitez de toutes ces branches, sera toûjours à chacune de ces puissances, comme la diagonale du dernier des parallelogrammes faits en A, ainsi que dans la démonstration 2. de la part. 1. du Th. 4. sera à chacune de leurs proportionnelles prises depuis les derniers nœuds sur les directions ou branches de cordes de ces puissances. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PART. III. La corde AP ayant encore plusieurs branches PX, PY, PZ, &c. issues d'un même nœud P, ausquelles soient appliquées autant de puissances X, Y, Z, &c. qui soient entr'elles comme les parties PO, PT, PV, &c. de ces branches prises depuis leur nœud commun P; soit par les extrêmitez T, V, de deux quelconques PT, PV, de ces proportionnelles, la droite TV; de son milieu M par l'extrêmité O d'une troisiéme PO de ces mêmes proportionnelles, soit menée MO, laquelle soit divisée en N de maniere qu'on ait ON. NM : : 2. 1. Et ainsi de suite suivant les Corol. 2. 3. 4. du Lem. 11. s'il y avoit ici plus de trois puissances, ou plus de trois branches à la corde AP. Le Corol. 5. de ce même Lemme 11. fait voir que l'effort resultant du concours de ces trois puissances X, Y, Z, sera ici de P vers N, & à chacune de ces puissances comme 3×PN est à chacune de leurs proportionnelles PO, PT, PV. Donc la corde AP tirée de cet effort suivant PN, qui sera (*part.* 1.) en ligne droite avec elle, sera ainsi tirée par le concours des puissances X, Y, Z, comme (*princip. gener.*) par une seule P dirigée suivant AP, & égale à l'effort resultant du concours de ces trois-là, c'est-à-dire, par une seule puissance P ainsi dirigée, laquelle (en prenant AB=3×PN) seroit à celles-là X, Y, Z, comme AB à leurs proportionnelles PO, PT, PV. Donc aussi l'effort en A, resultant du concours des puissances X, Y, Z, Q, R, S, sera ici le même & suivant la même direction que celui qui y resulteroit du concours des puissances P, Q, R, S. Or prenant AC, AE, AF, à AB, comme Q, R, S, sont à P; & en menant (ainsi que dans la démonstration de la part. 3. du Th. 4.) par les extrêmitez des proportionnelles AB, AC, AE, AF, premierement la droite CB; secondement de son milieu G la droite GE, laquelle soit divisée en H de maniere qu'on ait EH. HG : : 2. 1. En menant enfin HF divisée en L de maniere qu'on ait FL. LH : : 3. 1. Le Corol. 5. du Lem. 11. fait voir que l'effort resultant du concours des puissances P, Q, R, S, seroit non seulement suivant AL,

FIG. 69.

mais encore à chacune de ces quatre puissances, comme $4\times AL$ est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF. Donc l'effort en A, resultant du concours des six puissances X, Y, Z, Q, R, S, est aussi suivant AL, & à chacune des puissances P, Q, R, S, comme $4\times AL$ est à AB, AC, AE, AF. Mais on vient de voir que P est à X, Y, Z, comme AB est à PO, PT, PV. Donc l'effort en A, résultant du concours des puissances X, Y, Z, Q, R, S, est non seulement de A vers L suivant AL distance (*Def.* 13.) du nœud A au centre principal L d'équilibre de ces six puissances; mais encore à chacune d'elles, comme $4\times AL$ est à chacune de leurs proportionnelles PO, PT, TV, AC, AE, AF. Or la part. 1. fait voir qu'en cas d'équilibre entre le poids K & toutes ces puissances, l'effort resultant de leur concours lui est non seulement directement contraire, mais encore égal. Donc ce poids K est aussi pour lors à chacune de ces puissances X, Y, Z, Q, R, S, comme $4\times AL$ est à chacune de leurs proportionnelles PO, PT, PV, AC, AE, AF.

On démontrera de même, quelque nombre *m* de cordes qui partent du nœud A, quelque nombre de branches qu'elles ayent chacune, quelques branches qu'ayent encore celles-ci, & ainsi jusqu'à tant de branches qu'on voudra; que le poids K en équilibre avec toutes les puissances appliquées aux extrêmitez de toutes ces branches chacune à chacune, sera toûjours à chacune de ces puissances, comme le produit de $m-1$ par la distance du nœud A à leur centre principal d'équilibre est à chacune de leurs proportionnelles. *Ce qu'il falloit 3°. démontrer.*

FIG. 68. 69. PART. IV. Le poids K étant ainsi supposé aux puissances X, Y, Z, Q, R, S, &c. appliquées comme cidessus en celles qu'on voudra des raisons marquées dans les part. 2, 3. il sera à ces puissances (*Corol.* 10. *du Lem.* 3. & *Corol.* 5. *du Lem.* 11.) en même raison que l'effort resultant de leur concours d'action contre lui; & par consequent ce poids sera ici égal à cet effort. Donc ce même

poids

poids K étant de plus (*Hyp.*) directement contraire à ce même effort, il doit (*Ax.* 3.) demeurer en équilibre avec lui, c'est-à-dire, avec les puissances X, Y, Z, Q, R, S, &c. du concours desquelles cet effort resulte. *Ce qu'il falloit* 4°. *démontrer.*

COROLLAIRE.

Quelque nombre de nœuds & de branches qu'ayent ici les cordes des Fig. 68. 69. chacun de ces nœuds avec les branches qui en naissent, pouvant être regardé comme celui des Fig. 60. 61. 62. 63. avec les siennes; il est visible que ce qu'on a conclu du Th. 4. par rapport aux puissances appliquées aux branches de celui-ci, se peut aussi conclure du present Th. 5. par rapport aux puissances appliquées aux branches de chacun des nœuds des Fig. 68. 69. quelque nombre de nœuds & de branches à chacun d'eux, qu'il y puisse avoir. Donc,

1°. Tant de puissances données qu'on voudra (en prenant le poids K pour une) appliquées à autant de branches de cordes, issues de tant de nœuds qu'on voudra, peuvent demeurer en équilibre entr'elles suivant une infinité de directions differentes pour toutes & pour chacune, pourvû qu'il y ait plus de trois branches à chaque nœud. Cela se prouvera comme les Corollaires 2. 3. du Théoreme 4.

2°. Reciproquement tant de puissances qu'on voudra, appliquées encore à autant de branches de cordes, issues d'autant de nœuds qu'on voudra, peuvent changer de rapports en une infinité de manieres, & cependant faire toûjours équilibre entr'elles suivant les mêmes directions, y étant successivement appliquées, pourvû qu'il y ait encore plus de trois branches à chaque nœud. Cela se prouvera comme les Corol. 4. 5. du Th. 4.

3°. En cas d'équilibre, chacun des nœuds où il n'y auroit que quatre branches répandues en plus d'une demi-sphere, sera toûjours à un angle de parallelepipede, suivant les trois côtez & la diagonale duquel les quatre

branches de ce nœud seront dirigées ; & les quatre puissances qui y seront appliquées , seront alors entr'elles comme ces trois côtez & cette diagonale de parallelepipede. Cela se prouvera comme le nomb. 2. du Corol. 7. du Th. 4.

4°. Si ces quatre puissances sont ainsi dirigées, & en ce rapport entr'elles il y aura équilibre aussi entr'elles. Tout cela se prouvera comme le nomb. 3. du Corol. 7. du Th. 4.

5°. Chacun des nœuds où il n'y auroit encore que quatre branches répandues en plus d'une demi-sphere , sera au centre de gravité d'une pyramide triangulaire , par les quatre angles de laquelle ces quatre branches passeront , en cas d'équilibre ; & les puissances qui y seront appliquées , seront alors entr'elles comme les distances correspondantes de ce centre de gravité aux quatre angles de la pyramide ; c'est-à-dire , que ces puissances seront alors entr'elles comme les parties de leurs directions ou de leurs cordes , comprises entre ce centre & chacun de ces angles. Cela se prouvera comme le nomb. 2. du Corol. 8. du Th. 4.

6°. Reciproquement si les quatre puissances de chaque nœud , ainsi dirigées par le centre de gravité & par les quatre angles d'une telle pyramide ; sont entre-elles en ces rapports ; elles feront aussi pour lors équilibre entr'elles. Cela se prouvera comme le nomb. 3. du Corol. 8. du Th. 4.

SCHOLIE.

S'il se trouvoit ici des nœuds de cordes , lesquels n'eussent que trois branches , le Th. 3. part. 1. 2. fait voir qu'en cas d'équilibre entre les puissances qui y seroient appliquées , ce nœud seroit dans le centre de gravité d'un triangle rectiligne , par les trois angles duquel les directions de ces trois puissances passeroient ; & de plus que ces trois puissances seroient alors entr'elles comme les parties de leurs cordes ou directions , comprises entre

ce centre & chacun de ces angles, c'est-à-dire, comme les distances de ce centre de gravité à chacun de ces angles correspondans.

Le Th. 3. part. 3. fait reciproquement voir que si les trois puissances de chacun de ces nœuds sont dirigées par le centre de gravité & par les trois angles d'un triangle rectiligne quelconque; que de plus elles soient entre-elles comme les distances de ce centre à chacun de ces angles correspondans; elles seront alors en équilibre entr'elles.

Pour des nœuds à deux branches seulement, le nomb. 1. du Corol. 2. du Lem. 3. fait voir qu'il n'y en peut avoir, & que ce qu'on prendroit pour deux branches, se dirigeroit bien-tôt en une; c'est-à-dire, qu'elles se mettroient bien-tôt en ligne droite par l'action des deux puissances qui y seroient appliquées seules l'une contre l'autre.

THEOREME VI.

Soit encore le poids K soûtenu en équilibre par tant de puissances P, Q, R, S, T, &c. qu'on voudra, appliquées à autant de cordes AP, AQ, AR, AS, AT, &c. attachées ensemble par un même nœud A, & dirigées suivant quelques plans que ce soient: je dis presentement que ce poids ainsi en équilibre avec toutes ces puissances, sera toûjours à chacune d'elles comme la somme de leurs sublimitez, moins celle de leurs profondeurs, c'est-à-dire, comme l'excès dont la premiere de ces deux sommes surpasse la seconde, est à chacune des proportionnelles de ces mêmes puissances. FIG. 70. 71.

DEMONSTRATION.

Depuis le nœud commun A des cordes AP, AQ, AR, AS, AT, &c. soient sur ces mêmes cordes autant de parties AB, AC, AE, AF, AM, &c. proportionnelles aux puissances P, Q, R, S, T, &c. qui leur sont appliquées; des extrêmitez B, C, E, F, M, &c. de ces proportionnelles soient menées autant de lignes B*b*, C*c*, E*e*, FIG. 70.

Ff, Mm, &c. perpendiculaires en b, c, e, f, m, &c. sur la direction AK du poids K prolongée de part & d'autre. On voit suivant la Déf. 16. que Ac, Ae, Af, sont ici les sublimitez des puissances Q, R, S, qui tirent de bas en haut, & que Ab, Am, y sont les profondeurs des puissances P, T, qui y tirent de haut en bas. Je dis donc que le poids K en équilibre (*Hyp.*) avec les puissances P, Q, R, S, T, &c. est à chacune d'elles comme $Ac+Ae+Af-Ab-Am\pm$, &c. est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF, AM, &c.

Pour le voir, soit le parallélogramme BACH fait de deux quelconques AB, AC, de ces proportionnelles; de sa diagonale AH, & d'une troisiéme quelconque AE de ces mêmes proportionnelles soit ensuite le parallelogramme HAEG; de sa diagonale AG, & d'une quatriéme proportionnelle AF, soit aussi le parallelogramme GAFD de sa diagonale AD; & d'une cinquiéme proportionnelle AM, soit pareillement le parallélogramme DAMN; de sa diagonale AN, & d'une sixiéme proportionnelle, soit encore un autre parallélogramme, & toujours de même jusqu'à la derniere inclusivement des proportionnelles aux puissances supposées en équilibre avec le poids K, laquelle étant ici AM, la derniere des diagonales y sera AN. Par consequent (*Th.* 4. *part.* 1. 2.) non seulement cette derniere diagonale AN sera ici en ligne droite avec la direction AK de ce poids, mais encore ce poids K y sera à chacune des puissances P, Q, R, S, T, supposées en équilibre avec lui, comme cette derniere diagonale AN est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF, AM.

Cela étant ainsi, des points H, G, D, des parallelogrammes précedens, hors du dernier, soient encore Hh, Gg, Dd, perpendiculaires en h, g, d, sur la direction AK du poids K, prolongée de part & d'autre. Le Lem. 10. donne, 1°. $Ah = Ab - Ac$. 2°. $Ag = Ae - Ah$ (*nomb.* 1.) $= Ae - Ab + Ac$. 3°. $Ad = Ag + Af$ (*nomb.* 2.) $= Ae - Ab + Ac + Af$. 4°. $AN = Ad - Am$ (*nomb.* 3.) $= Ae - Ab$

$+Ac+Af-Am$. Et en continuant toûjours ainſi juſqu'à la derniere diagonale incluſivement, telle qu'eſt ici AN, laquelle ſe trouve toûjours (*Th.* 4. *part.* 1.) dans la direction prolongée KA du poids K en équilibre avec les puiſſances ſuppoſées ; on trouvera toûjours cette derniere diagonale $=Ae-Ab+Ac+Af-Am\pm$ &c. ce qui ſe voit auſſi tout d'un coup par le Corol. 3. du Lem. 10.

Or le Th. 4. part. 2. fait voir qu'en ce cas d'équilibre le poids K eſt toûjours à chacune des puiſſances P, Q, R, S, T, &c. qui l'y ſoûtiennent, comme cette derniere diagonale eſt à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF, AM, &c. Donc ce poids K eſt auſſi toûjours alors à chacune de ces puiſſances P, Q, R, S, T, &c. comme $Ae+Ac+Af-Ab-Am\pm$, &c. eſt à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF, AM, &c. c'eſt-à-dire (*Déf.* 16.) comme la ſomme de leurs ſublimitez Ac, Ae, Af, &c. moins la ſomme de leurs profondeurs Ab, Am, &c. ou comme l'excès dont la premiere de ces deux ſommes ſurpaſſe la ſeconde, eſt à chacune de ces mêmes proportionnelles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

Soient encore les lignes AB, AC, AE, AF, AM, &c. proportionnelles aux puiſſances P, Q, R, S, T, &c. ſuppoſées en équilibre avec le poids K ſuivant ces directions. Des extrêmitez B, C, E, F, M, &c. de ces proportionnelles ſoient encore auſſi Bb, Cc, Ee, Ff, Mm, &c. perpendiculaires en b, c, e, f, m, &c. ſur la direction AK de ce poids, prolongée de part & d'autre. Soient de plus appellées b, c, e, f, m, &c. les forces verticales employées ſelon le Lem. 3. part. 1. par les puiſſances P, Q, R, S, T, &c. pour ou contre le poids K ſuivant ſa direction Am ou Ad. FIG. 71.

Cela posé, le Lem. 3. part. 1. donnera $\left\{ \begin{array}{l} b.\ P :: Ab.\ AB. \\ c.\ Q :: Ac.\ AC. \\ e.\ R :: Ae.\ AE. \\ f.\ S :: Af.\ AF. \\ m.\ T :: Am.\ AM. \end{array} \right.$
&c.

Donc les puissances P, Q, R, S, T, &c. étant (*Hyp.*) entr'elles comme AB, AC, AE, AF, AM, &c. leurs forces verticales b, c, e, f, m, &c. pour ou contre le poids K, sont aussi entr'elles comme Ab, Ac, Ae, Af, Am, &c. Par consequent l'on aura ici $c+e+f-b-m\pm$, &c. $b :: Ac+Ae+Af-Ab-Am\pm$ &c. Ab. Mais on vient de voir $b.\ P :: Ab.\ AB$. Donc aussi (en raison ordonnée) $c+e+f-b-m\pm$, &c. P :: $Ac+Ae+Af-Ab-Am\pm$, &c. AB. Or les efforts verticaux c, e, f, &c. des puissances Q, R, S, &c. étant ici de bas en haut directement contraires au poids K, & aux efforts verticaux b, m, &c. de haut en bas, que les puissances P, T, &c. y font directement contre ceux-là en faveur de ce poids; l'équilibre ici supposé exige (*Ax.* 4.) $c+e+f+$ &c $=$ K $+b+m+$ &c. Et consequemment $c+e+f-b-m\pm$ &c $=$ K. Donc K. P :: $Ac+Ae+Af-Ab-Am\pm$ &c. AB. Mais (*Hyp.*) P est à Q, R, S, T, &c. comme AB est à AC, AE, AF, AM, &c. Donc aussi (en raison ordonnée) ce poids K est à chacune de toutes les puissances P, Q, R, S, T, &c. supposées en équilibre avec lui, comme $Ac+Ae+Af-Ab-Am\pm$, &c. est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF, AM, &c. Or (*Déf.* 16.) Ac, Ae, Af, sont les sublimitez des puissances Q, R, S, qui tirent de bas en haut; & Ab, Am, sont les profondeurs des puissances P, T, qui tirent au contraire de haut en bas. Donc enfin le poids K en équilibre avec elles & avec les autres, c'est-à-dire, avec toutes les puissances P, Q, R, S, T, &c. est toûjours alors à chacune d'elles, comme la somme de leurs sublimitez,

moins la somme de leurs profondeurs, ou comme l'excès de la premiere de ces deux sommes sur la seconde, est à chacune des proportionnelles AB, AC, AE, AF, AM, &c. de ces mêmes puissances. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

COROLLAIRE I.

Puisque suivant la premiere des deux démonstrations précedentes, & suivant le Corol. 3. du Lem. 10. tant que le poids K est en équilibre (comme ci-dessus) avec les puissances P, Q, R, S, T, &c. la somme de leurs sublimitez, moins la somme de leurs profondeurs, est toûjours égale à la diagonale du dernier des parallelogrammes faits de leurs proportionnelles comme dans la démonstration 1. & comme dans la démonstration de la part. 2. du Th. 4. Il suit reciproquement de la part. 4. de ce Th. 4. qu'il y aura toûjours équilibre entre ce poids & ces puissances, tant que la somme de leurs sublimitez, moins celle de leurs profondeurs, prises les unes & les autres sur sa direction, sera égale à cette derniere diagonale prise aussi sur la direction de ce poids. FIG. 70. 71.

COROLLAIRE II.

Puisque (*Démonstr.* 2.) les efforts verticaux c, e, f, des puissances sublimes Q, R, S, sont entr'eux comme les sublimitez Ac, Ae, Af, de ces puissances; & que (*Démonstr.* 2.) leur somme $c+e+f$ est égale à la somme $b+m+$K des verticaux directement contraires b, m, des puissances profondes P, T, & du poids K, tant que ce poids est en équilibre avec toutes ces puissances: il suit manifestement que les portions de $b+m+$K que les puissances sublimes Q, R, S, portent chacune alors pour sa part, sont entr'elles comme les sublimitez Ac, Ae, Af, de ces mêmes puissances.

COROLLAIRE III.

Par la même raison si toutes les puissances P, Q, R, S, T, &c. étoient sublimes, c'est-à-dire (*Déf.* 16.) si elles

tiroient toutes de bas en haut contre le poids K en équilibre avec elles, en sorte que leurs forces verticales b, c, e, f, m, &c. fussent toutes de bas en haut directement contraires à ce poids, & que consequemment (*Déf.* 10.) Ab, Ac, Ae, Af, Am, &c. fussent autant de sublimitez de ces puissances ; ce que chacune d'elles porteroit ou soûtiendroit de ce poids, seroit alors comme chacune de ces mêmes sublimitez.

COROLLAIRE IV.

FIG. 72. 73. Si de toutes ces puissances il n'en restoit que deux R, S, qui seules soutinssent ensemble le poids K en équilibre avec elles, comme dans les Fig. 72. 73. il suit des deux derniers Corol. 2. 3. conformément aux Corol. 2. 5. 6. du Th. 2.

FIG. 73. 1°. Que si une de ces deux puissances, par exemple R, tiroit le poids K de haut en bas, & l'autre S de bas en haut, comme dans la Fig. 73. ce poids seroit (*Corol.* 2.) à chacune de ces puissances R, S, comme l'excès Af—Ae de la sublimité Af de la seconde S sur la profondeur Ae de la premiere R, seroit à chacune des proportionnelles AE, AF, de ces mêmes puissances R, S, conformément au Corol. 6. du Th. 2.

2°. Qu'alors l'effort vertical f de bas en haut de la puissance sublime S, seroit seul égal à K+e somme du poids K & de l'effort vertical e de la puissance profonde R : de sorte que la puissance sublime S soûtiendroit alors seule le poids K augmenté de l'effort vertical e que la puissance profonde R fait de haut en bas en faveur de ce poids, conformément encore au Corollaire 6. du Théoreme 2.

FIG. 72. 3°. Mais si les puissances R, S, étoient sublimes toutes deux domme dans la Fig. 72. c'est-à-dire (*Déf.* 16.) si elles tiroient toutes deux de bas en haut contre le poids K en équilibre (*Hyp.*) avec elles ; les précedens Corol. 2. 3. font aussi voir que ce poids seroit alors à chacune de ces puissances R, S, comme la somme Ae+Af de leurs sublimitez

ſublimitez Ae, Af, feroit à chacune de leurs proportionnelles AE, AF, conformément au Corol. 5. du Th. 2.

4°. Ces précedens Corol. 2. 3. font voir auſſi que la partie du poids K ſoûtenue par la puiſſance R, ſeroit alors à ſon autre partie ſoûtenue par la puiſſance S, comme la ſublimité Ae de la premiere de ces deux puiſſances ſeroit à la ſublimité Af de la ſeconde, conformément au Corol. 2. nomb. 1. du Th. 2.

Il eſt manifeſte que tous les autres Corollaires du Th. 2. & ce Théoreme lui-même pourroient être ainſi déduits du précedent Corol. 3. Auſſi ce Th. 2. n'eſt-il qu'un cas particulier du preſent Th. 6. d'où reſulte ce Corol. 4.

COROLLAIRE V.

Pour faciliter le calcul de tout ceci, ſoient pris a pour le ſinus total, & $p, q, r, ſ, t$, &c. pour les ſinus des angles ABb, ACc, AEe, AFf, AMm, &c. complemens (chacun à un droit) des aigus que font les directions des puiſſances P, Q, R, S, T, &c. avec celle du poids K (*Hyp.*) en équilibre avec elles. FIG. 71.

Les angles (*Hyp.*) droits en b, c, e, f, m, &c. donneront
$$\left\{\begin{array}{l} a.\,p :: AB.\,Ab = \frac{p}{a}\times AB \\ a.\,q :: AC.\,Ac = \frac{q}{a}\times AC \\ a.\,r :: AE.\,Ae = \frac{r}{a}\times AE \\ a.\,ſ :: AF.\,Af = \frac{ſ}{a}\times AF \\ a.\,t :: AM.\,Am = \frac{t}{a}\times AM \end{array}\right.$$
&c.

D'où reſulte $Ac + Ae + Af - Ab - Am \pm \&c = \frac{q\times AC + r\times AE + ſ\times AF - p\times AB - t\times AM \pm \&c.}{a}$

mais ſuivant le preſent Th. 6. le poids K ici en équilibre (*Hyp.*) avec les puiſſances P, Q, R, S, T, &c. y eſt à chacune d'elles comme $Ac + Ae + Af - Ab - Am \pm$ &c. eſt à cha-

cune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF, AM, &c. Donc ce poids K y doit pareillement être à chacune de ces puiſſances P, Q, R, S, T, &c. comme

$$\frac{q \times AC + r \times AE + s \times AF - p \times AB - t \times AM \pm \&c.}{a}$$

eſt à chacune de leurs mêmes proportionnelles AB, AC, AE, AF, AM, &c. Et conſequemment auſſi comme $q \times AC + r \times AE + s \times AF - p \times AB - t \times AM \pm \&c$ eſt à chacun des produits $a \times AB$, $a \times AC$, $a \times AE$, $a \times AF$, $a \times AM$, &c. faits du ſinus total par chacune de leurs proportionnelles. D'où l'on voit que n'y ayant ici que des proportionnelles de puiſſances données, avec des ſinus d'angles donnez, il ſera aiſé d'en conclure par le calcul la valeur requiſe du poids ainſi en équilibre avec ces puiſſances.

THEOREME VII.

FIG. 74. *De quelque maniere qu'un poids ſoit ſoûtenu avec des cordes par quelque nombre de puiſſances que ce ſoit, appliquées aux branches de tant de nœuds qu'on voudra, dirigées ſuivant quelques plans que ce ſoient: chacune de ces puiſſances eſt toûjours à ce poids en raiſon compoſée d'autant d'autres raiſons qu'il y a de nœuds entre cette puiſſance & ce poids: ſçavoir, à chaque nœud, de la raiſon qui eſt entre la proportionnelle à la force dont ce nœud eſt tiré ſuivant la corde qui lui donne communication avec cette puiſſance, & la ſomme des ſublimitez, moins celle des profondeurs, de toutes les forces dont les branches dans leſquelles ce même nœud ſe diviſe, ſont tirées ſuivant ſa direction contre la réſiſtance qui leur vient par la corde de communication de lui au poids ſuppoſé en équilibre avec toutes les puiſſances qui lui ſont ainſi appliquées.*

DEMONSTRATION.

Si le poids K dont la corde Aλ ſe diviſe en tant de branches AZ, AX, AY, Aφ, qu'on voudra, dont celles qu'on voudra auſſi, ſe diviſent encore en pluſieurs branches,

& celles qu'on voudra encore de celles-ci en plusieurs autres de la maniere qu'on voit ici; & toûjours de même jusqu'aussi loin qu'on voudra. Commencez au premier nœud A à marquer sur les branches AZ, AX, AY, AΦ, &c. des parties AM, AN, AP, Aθ, &c. qui soient entre elles comme les forces avec lesquelles ces cordes sont tirées chacune suivant sa direction. Faites-en autant sur les branches dans lesquelles celles-ci se subdivisent; & toûjours de même jusqu'aux dernieres ausquelles les puissances C, E, D, B, F, G, H, I, T, φ, &c. sont appliquées. Après cela des extrêmitez de toutes ces proportionnelles soient marquées (*Déf.* 16.) les sublimitez & les profondeurs de toutes ces forces.

Cela fait, je dis qu'en cas d'équilibre entre toutes ces forces ou puissances & le poids K, chacune d'elles, par exemple, la puissance D sera toûjours alors à ce poids K en raison composée d'autant d'autres raisons telles qu'elles sont énoncées dans ce Théoreme-ci, qu'il y a de nœuds entre cette puissance & ce poids.

Car, 1°. la puissance D étant (*Hyp.*) à la puissance E, comme OS à OV, elle est aussi (*Th.* 6.) à la force dont le nœud O leur résiste suivant OZ, comme OS à la somme de leurs sublimitez O*ſ* & O*u*, c'est-à-dire :: OS. O*ſ*+O*u*. 2°. Cette même résistance ou force du nœud O suivant ZO, étant aussi (*Hyp.*) aux puissances C, B, comme ZR à ZL & ZQ, elle est de même (*Th.* 6.) à la résistance que leur fait le nœud Z suivant ZA, comme ZR à la somme des sublimitez Z*r* & Z*q* moins la profondeur Z*l*, c'est-à-dire :: ZR. Z*r*+Z*q*—Z*l*. 3°. Enfin la valeur de cette résistance suivant ZA, étant encore (*Hyp.*) aux forces dont le nœud A est tiré suivant AX, AY, Aφ, &c. comme AM à AN, AP, Aθ, &c. elle est aussi (*Th.* 6.) au poids K comme AM à la somme des sublimitez A*m*, A*n*, &c. moins celle des profondeurs Aλ, A*p*, &c. c'est-à-dire :: AM. A*m*+A*n*—Aλ—A*p*. Donc en multipliant par ordre ces trois rangées de proportionnelles, la puissance D se trouvera être au poids K, comme

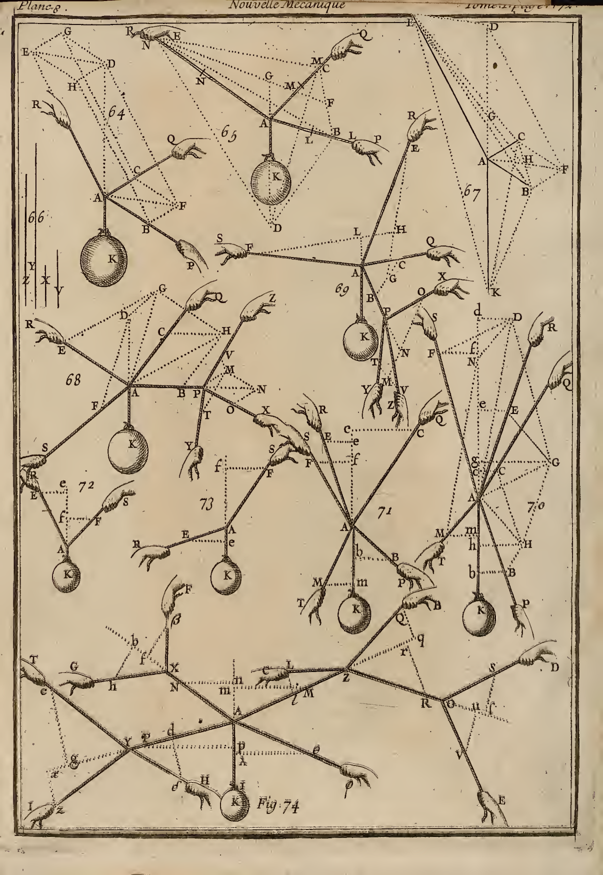
le produit des trois antecedens OS, ZR, AM, au produit de leurs trois consequens $Os+Ou$, $Zr+Zq-Zl$, $Am+An-Ap-A\lambda$: c'est-à-dire en raison composée des trois raisons de OS à $Os+Ou$, de ZR à $Zr+Zq-Zl$, & de AM à $Am+An-Ap-A\lambda$ qu'on voit telle que le Théoreme les annonce. Or il n'y a en effet que trois nœuds O, Z, & A, entre cette puissance D & ce poids K. Donc cette puissance est ici à ce poids en raison composée d'autant d'autres raisons telles que ce Théoreme-ci les annonce, qu'il y a de nœuds entre cette puissance D & ce poids K.

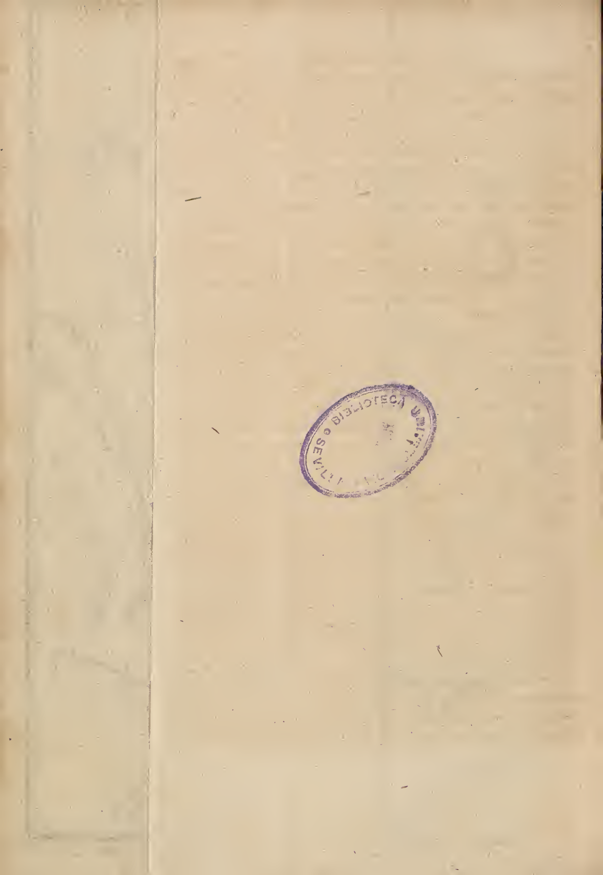
On démontrera de même que la puissance C est à ce poids K en raison composée de ZL à $Zr+Zq-Zl$, & de AM à $Am+An-Ap-A\lambda$. On trouvera encore de même que la puissance F est à ce même poids K en raison composée de $X\beta$ à $Xb+Xf$, & de AN à $Am+An-Ap-A\lambda$; & ainsi de toutes les autres puissances, en quelque nombre qu'elles soient, de quelque maniere, & à quelque nombre de nœuds qu'elles soient appliquées.

Donc en general, de quelque maniere qu'un poids soit soûtenu avec des cordes par quelque nombre de puissances que ce soit, appliquées à tant de nœuds qu'on voudra, chacune d'elles est toûjours à ce poids en raison composée d'autant d'autres telles que ce Théoreme-ci les annonce, qu'il y a de nœuds entre cette puissance & ce poids. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

On voit qu'en prenant ZR égale à $Os+Ou$, avec ZL & ZQ à ZR en même proportion qu'elles sont ici ; de plus AM égale à $Zq+Zr-Zl$, avec AN, AP, Aθ, &c. aussi à AM en même proportion qu'elles sont ici : la puissance D sera au poids K, comme OS à $Am+An-C\lambda-Cp\pm$ &c. c'est-à-dire, comme sa proportionnelle à la somme des sublimitez moins celle des profondeurs des forces avec lesquelles les branches du premier nœud A sont tirées chacune suivant sa direction. Il en faut penser au-


64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
Fig. 74


BIBLIOTECA

tant de toutes les autres puiſſances appliquées au poids K, ſoit de près, ſoit de loin.

COROLLAIRE II.

Lorſqu'un poids attaché à une corde qui a pluſieurs nœuds, par chacun deſquels, entre toutes les branches qui en naiſſent, il n'y en a qu'une qui ſe ſubdiviſe en d'autres branches : lors, dis-je, que le poids K attaché à une telle corde, eſt ſoûtenu par pluſieurs puiſſances Y, X, S, R, V, Z, &c. tellement appliquées aux dernieres de ces branches que tous les nœuds F, E, C, &c. d'où elles naiſſent, ſe trouvent dans la ligne de direction de ce poids ; chacune de ces puiſſances, en quelque nombre qu'elles ſoient, eſt toûjours à ce poids comme la proportionnelle de cette même puiſſance à la ſomme des ſublimitez moins celle des profondeurs de tout ce qu'il y en a d'appliquées à ce même poids. Car ſi l'on prend ſur les branches de chaque nœud des parties OF, EI, CB, CA, EH, FK, FN, EM, &c. proportionnelles aux forces avec leſquelles chacune de ces branches eſt tirée ſuivant ſa direction, & que des extrêmitez de ces mêmes parties on marque (*Def.* 16.) leurs ſublimitez avec leurs profondeurs ; on trouvera, 1°. que les proportionnelles FN, EM, &c. qui ſe trouvent dans la ligne de direction du poids K, ſont égales aux ſublimitez FN, EM, &c. des forces avec leſquelles ces proportionnelles ſont tirées ſuivant leur direction, c'eſt-à-dire, ſuivant celle du poids. 2°. On trouvera encore que chacune de ces mêmes proportionnelles, par exemple, FN eſt auſſi toûjours égale à la ſomme des ſublimitez moins celle des profondeurs des forces ou des puiſſances appliquées au nœud E qui eſt immédiatement au deſſus du nœud F depuis lequel cette proportionnelle a été priſe : puiſque (*Hyp.*) cette même proportionnelle, & (*Th.* 6.) cette difference des ſommes ſont à la proportionnelle EI de la puiſſance X, comme la force dont le nœud E eſt tiré ſuivant la corde EF, eſt à cette même puiſſance. Pour la même raiſon

FIG. 75. 76.

EM est égale à la somme des sublimitez moins celle des profondeurs des forces ou des puissances appliquées au nœud C, qui est immédiatement au dessus de E; & ainsi des autres proportionnelles qui se trouvent dans la direction du poids K. De-là on verra que chacune des sublimitez FN, EM, &c. des forces qui suivent la direction de ce poids, est toûjours égale à la somme des sublimitez moins celle des profondeurs des forces ou des puissances au nœud qui est immédiatement au dessus de celui depuis lequel elle se prend, par exemple, au dessus de F pour FN, au dessus de E pour EM, &c. D'où il suit que la sublimité FN, qui se prend depuis le plus bas F de tous ces nœuds, est égale à la somme des sublimitez moins celle des profondeurs de toutes les puissances X, V, S, R, &c. appliquées à tous les autres nœuds E, C, &c. Or on vient de voir dans le précedent Corol. 1. que chacune de toutes les puissances qui soûtiennent le poids K, par exemple S, ou Y, est à ce poids comme la proportionnelle CB, ou OF, de cette puissance est à la somme des sublimitez moins celle des profondeurs des forces avec lesquelles toutes les branches du plus bas nœud F sont tirées chacun suivant sa direction contre ce poids K; c'est-à-dire, à la somme faite de la sublimité FN, & de la somme des sublimitez moins les profondeurs des puissances Y, Z, &c. immédiatement appliquées au nœud F. Donc chacune des puissances Y, X, S, R, V, Z, &c. est ici au poids K, comme la proportionnelle de cette puissance est à la somme des sublimitez moins celle des profondeurs de tout ce qu'il y en a d'appliquées à ce même poids.

Il est ici à remarquer que les proportionnelles FN, EM, &c. dirigées suivant la direction du poids K, ne le sont d'aucune des puissances ici supposées, mais de forces en ce sens resultantes du concours de ces puissances: par exemple, FN n'exprime aucune de ces puissances, elle n'exprime que la force ou l'effort suivant FE, resultant du concours d'action de tout ce qu'il y a de puissances R, V, X, S, &c. au dessus de F. De

même EM n'exprime que la force ou l'effort suivant EC, resultant du concours d'action de tout ce qu'il a de puissances R, S, &c. au dessus de E ; & ainsi de tout ce qu'il pourroit y avoir d'autres proportionnelles dirigées suivant la direction du poids. K.

COROLLAIRE III.

Puisque suivant le précedent Corol. 2. chacune des puissances ici supposées en équilibre avec le poids K, y est à ce poids comme la proportionnelle de cette puissance à la somme des sublimitez moins celle des profondeurs de tout ce qu'il y en a d'appliquées à ce même poids ; la somme de toutes ces puissances doit être ici à ce poids, comme la somme de leurs proportionnelles à la somme de leurs sublimitez moins celle de leurs profondeurs : de sorte que s'il n'y en avoit que deux d'appliquées à chaque nœud, dont l'une tirât à droit & l'autre à gauche, & que toutes celles de chaque côté fussent égales entr'elles, avec des directions paralleles entr'elles, la somme (Fig. 75.) des sublimitez, par exemple, F*o*+F*k*, ou E*i*+E*h*, ou C*b*+C*a*, &c. des deux puissances appliquées à quel que ce soit des nœuds F, E, C, &c. ou bien la difference (Fig. 76.) de la sublimité de l'une à la profondeur de l'autre, par exemple, F*k*—F*o*, ou E*h*—E*i*, ou C*a*—C*b*, &c. étant alors la même pour tous ces nœuds, aussi-bien que les proportionnelles de ces puissances ; la somme de toutes ces mêmes puissances seroit alors au poids K comme la somme des proportionnelles de deux d'entr'elles, appliquées à un même nœud, quel qu'il soit, est à la somme (Fig. 75.) des sublimitez de ces deux puissances, ou à la difference (Fig. 76.) dont la sublimité de l'une surpasse la profondeur de l'autre.

COROLLAIRE IV.

Ce qui fait enfin voir que si toutes les puissances Y, X, S, R, V, Z, &c. étoient égales entr'elles, & que toutes leurs directions fissent vers le haut avec celle du poids K FIG. 75.

des angles égaux aussi entr'eux ; leur somme seroit alors à ce poids (Fig. 75.) comme une de leurs proportionnelles à une de leurs sublimitez, l'une & l'autre prise à volonté : c'est-à-dire, comme le sinus total au sinus du complement de celui qu'on voudra de ces mêmes angles.

COROLLAIRE V.

FIG. 77. 78. Ce Théoreme-ci fait encore voir que dans l'hypotese des lignes de direction de tous les points du corps AD, concourantes au centre E de la Terre, de quelque maniere que ce poids soit soûtenu par tant de puissances F, G, H, I, K, L, M, N, &c. qu'on voudra avec des cordes qui lui soient appliquées en tant de points A, B, C, D, &c. qu'on voudra aussi ; chacune de ces puissances sera toûjours à ce poids, comme chacune de leurs proportionnelles à la somme des sublimitez des forces avec lesquelles ces points A, B, C, D, &c. seront tirez suivant les lignes AE, BE, CE, DE, &c. par le concours d'action des puissances qui y sont appliquées : des sublimitez, dis-je, déterminées comme dans le Corol. 1. Car il est clair que ce poids agit contre toutes ces puissances de même que feroit une force qui lui seroit égale, si AE, BE, CE, DE, &c. étoient autant de cordes attachées ensemble par un nœud commun E auquel cette force fût appliquée suivant la direction ZE du centre de gravité de ce poids. Or en ce cas les points A, B, C, D, &c. étant comme autant de nœuds ausquels sont appliquées, chacune suivant sa direction, les puissances F, G, H, I, K, L, M, N, &c. si l'on prend depuis E sur chacune des lignes AE, BE, CE, DE, &c. une partie E*g*, E*f*, E*c*, E*b*, &c. égale à la somme des sublimitez moins celle des profondeurs des puissances appliquées à chacun des points A, B, C, D, &c. On trouvera (*Cor.* 1.) que chacune de toutes ces puissances F, G, H, I, K, L, M, N, &c. seroit alors à la force qu'on suppose en E égale au poids AD ; comme chacune de leurs proportionnelles DO, CP, BQ, DX, AR, CV, BT, AS, &c. à la somme des sublimitez E*l*,

E*e*,

Ee, Ed, Ea, &c. des forces dont les nœuds A, B, C, D, &c. seroient alors tirez, chacun suivant la ligne qui le joint avec le point E. Donc chacune de ces mêmes puissances est aussi au poids AD, comme chacune de leurs proportionnelles à la somme de telles sublimitez des forces avec lesquelles les points A, B, C, D, &c. sont tirez suivant les lignes AE, BE, CE, DE, &c. par le concours d'action des puissances qui y sont appliquées.

Si les forces avec lesquelles les differens points A, B, C, D, &c. du corps AD, sont tirez suivant des lignes qui concourent au centre de la Terre (auquel on suppose que tous ses points tendent) par le concours d'action des puissances qui lui sont appliquées, avoient quelque profondeur: On trouveroit de même que chacune de toutes ces puissances supposées en équilibre avec ce poids AD, lui seroit en raison de la proportionnelle de cette puissance à la somme de telles sublimitez moins celle des profondeurs de ces mêmes forces: mais ce cas étant impossible, puisqu'il faudroit pour cela que ce poids comprît pour le moins plus du quart de la circonference de la Terre, on n'a pas crû qu'il fût necessaire de l'exprimer ici.

COROLLAIRE VI.

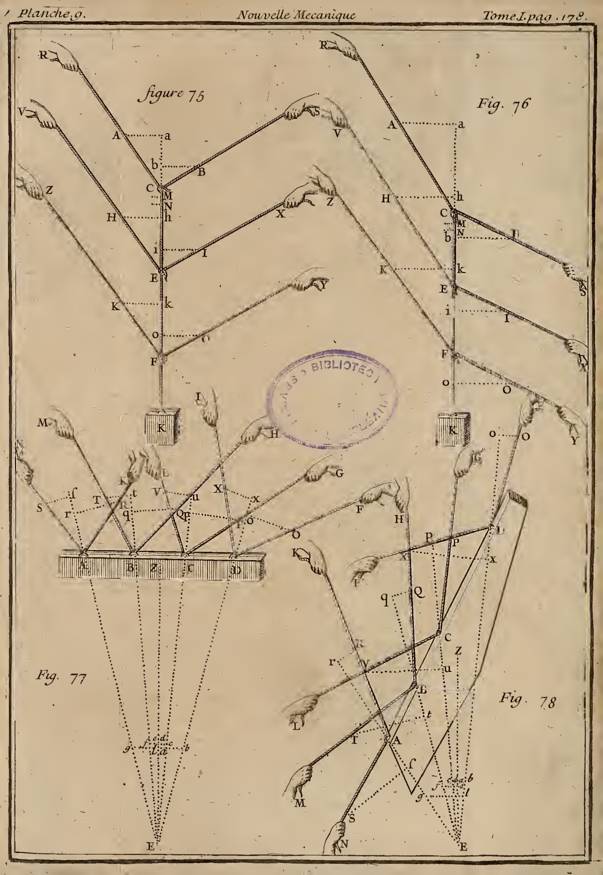
On voit presentement que dans l'hypothese ordinaire, où l'on regarde les directions AE, BE, CE, DE, &c. comme paralleles entr'elles, chacune des sublimitez E*l*, E*e*, E*d*, E*a*, &c. déterminées sur ZE par chacune des proportionnelles E*g*, E*f*, E*c*, E*b*, &c. qu'on vient (*Cor.* 5.) de prendre égales à la somme des sublimitez moins celle des profondeurs des puissances appliquées à chacun des points A, B, C, D, &c. étant alors égales à ces mêmes proportionnelles; chacune des puissances ainsi appliquées à ce poids, sçavoir, F, G, H, I, K, L, M, N, &c. est toûjours en ce cas à ce même poids AD, comme chacune de leurs proportionnelles à la somme de toutes leurs sublimitez moins celle de toutes leurs profondeurs.

COROLLAIRE VII.

D'où il suit que dans la même hypothese des directions des graves paralleles entr'elles, la somme de toutes ces puissances est à ce poids comme la somme de leurs proportionnelles est à la somme de leurs sublimitez moins celle de leurs profondeurs : de sorte que s'il n'y en avoit que deux d'appliquées à chaque point de ce corps AD, dont l'une tirât à droit, & l'autre à gauche ; & que toutes celles de chaque côté fussent égales entr'elles, & avec des directions qui fissent avec celle du point auquel elles sont appliquées, des angles de chaque côté égaux entreeux : la somme (Fig. 77.) des sublimitez, par exemple, A*r*+A*ſ*, ou B*q*+B*t*, ou C*p*+C*u*, ou D*o*+D*x*, &c. des deux puissances appliquées à celui qu'on voudra des nœuds A, B, C, D, &c. ou bien (Fig. 78.) la difference de la sublimité de l'une à la profondeur de l'autre, par exemple, A*r*—A*ſ*, ou B*q*—B*t*, ou C*p*—C*u*, ou D*o*—D*x*, &c. étant alors la même pour tous ces points, aussi-bien que les proportionnelles de ces puissances ; la somme de toutes ces puissances seroit alors au poids AD, comme la somme des proportionnelles de deux d'entr'elles appliquées à un même point, quel qu'il soit, est à la somme (Fig. 77.) de leurs sublimitez, ou (Fig. 78.) à la difference qui est entre la sublimité de l'une & la profondeur de l'autre.

COROLLAIRE VIII.

Ce qui fait enfin voir que si toutes les puissances F, G, H, I, K, L, M, N, &c. étoient égales entr'elles, & que toutes leurs directions fissent vers le haut avec celles des points où elles sont appliquées, des angles égaux entreeux ; la somme de toutes ces puissances seroit alors au poids AD (Fig. 77.) comme une de leurs proportionnelles à une de leurs sublimitez, de quelque maniere qu'on les prenne : c'est-à-dire, comme le sinus total au sinus du complement de celui qu'on voudra de ces mêmes angles.



BIBLIOTEC

THEOREME VIII.

Quelques ſoient les directions des corps peſans, ſi deux poids quelconques K, L, ſont ſuſpendus à deux points auſſi quelconques C, D, d'une corde lâche parfaitement flexible ACDB, attachée par les deux bouts à deux clous ou crochets A, B; & qu'on faſſe deux parallelogrammes DCME, CDNF, qui ayent CD pour côté commun, & dont les diagonales CE, DF, ſoient ſur les directions KC, LD, de ces deux poids prolongez de ce côté-là. FIG. 79.

I. *Ces deux poids K, L, en ce cas d'équilibre, ſeront entr'eux comme ces diagonales correſpondantes CE, DF.*

II. *Reciproquement ſi ces deux poids K, L, ſont entr'eux en raiſon de ces deux diagonales CE, DF, ils demeureront en équilibre entr'eux dans la poſition donnée ACDB de la corde.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Le Th. 1. fait voir qu'en cas d'équilibre le poids K eſt à la force dont la partie CD de la corde eſt tirée de C vers D :: CE. CD. Et que la force dont cette même partie CD de la corde eſt tirée de D vers C, eſt au poids L :: CD. CF. Mais ces forces avec leſquelles cette même partie CD de la corde eſt tirée en même tems de C vers D, & de D vers C, ſont (*Ax.* 4.) égales entr'elles en ce cas d'équilibre. Donc (en raiſon ordonnée) le poids K eſt ici au poids L, comme CE eſt à CF. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

PART. II. Les deux poids donnez K, L, devant ſe mettre tôt ou tard en équilibre entr'eux, à cauſe des réſiſtances invincibles (*Hyp.*) des crochets A, B; ſi pour cela la poſition de la corde ACB devoit être autre que la donnée ACDB, cette poſition donnée ne pouvant changer que par l'augmentation d'un de ſes deux angles ACD, CDB, & par la diminution de l'autre, les directions des poids demeurant (*Hyp.*) toûjours les mêmes; ſans faire augmenter une des deux diagonales CE, DF, & ſans faire diminuer l'autre; c'eſt-à-dire, ſans faire changer le

rapport que ces deux diagonales ont entr'elles dans la position donnée ACDB de cette corde ; les deux poids K, L, supposées en raison de ces deux diagonales, pourroient être en équilibre entr'eux, sans y être en ce rapport : ce que la part. 1. fait voir être impossible. Donc il est pareillement impossible qu'ils ne demeurent pas en équilibre entr'eux dans la position donnée ACDB de la corde ACB. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

COROLLAIRE I.

Si presentement on suppose à l'ordinaire que les directions EK, FL, de ces deux poids K, L, soient paralleles entr'elles, & qu'on prolonge BD, AC, jusqu'à leur rencontre en G, H ; les nouveaux parallelogrammes DECH, CFDG, qui en resulteront, rendant DH=CE, & CG=DF ; la part. 1. qui vient de donner K. L :: CE. DF. pour toutes sortes de directions des poids K, L, donnera pareillement K. L :: DH. CG. pour ces paralleles-ci ; & consequemment K×CG=L×DH.

COROLLAIRE II.

Reciproquement si les deux poids K, L, de directions CK, DL, paralleles l'une à l'autre, sont entr'eux comme DH, CG ; la part. 2. fait voir qu'ils demeureront en équilibre dans la position donnée ACDB de la corde ACB : puisque DH=CE, & CG=DF, les rendroient entr'eux comme les diagonales correspondantes CE, DF.

COROLLAIRE III.

Il suit du Corol. 1. que dans cette hypothese des directions paralleles entr'elles, les prolongemens CH, DG, des parties de corde AC, BD, compris entre les directions des poids K, L, doivent se diviser mutuellement en Q en raison réciproque de ces poids en équilibre (*Hyp.*) entr'eux ; c'est-à-dire, de maniere qu'elles rendent QH. QC :: K. L :: QD. QG. Et qu'au contraire les paralleles DE, CF, à ces prolongemens CH, DG, & comprises en-

tre les mêmes directions des poids K, L, se divisent mutuellement en P en raison directe de ces poids; c'est-à-dire, de maniere qu'elles rendent EP. PD : : K. L : : CP. PF. Car le parallelisme supposé de ces directions EK, FL, des poids K, L, rendant les triangles CQG, HQD, semblables entr'eux, de même les triangles CPE, FPD, l'on aura ici QH. QC : : QD. QG : : DH. CG (*Corol.* 1.) : : K. L. Et EP. PD : : CP. PF : : CE. DF (*Th.* 8.) : : K. L. ainsi qu'on le vient de dire.

COROLLAIRE IV.

Soient presentement tant de poids quelconques K, L, M, N, &c. qu'on voudra, suspendus à autant de points aussi quelconques C, D, E, F, &c. de la corde lâche & parfaitement flexible ACDB entre ses deux points d'attache A, B. Si après avoir prolongé de CK vers FN, chacun des côtez AC, CD, DE, &c. du polygone ACDEFB que les poids font faire à cette corde, jusqu'à la rencontre en H, Q, S, &c. des directions (*Hyp.*) paralleles entr'elles DL, EM, FN, &c. immédiatement suivantes des poids L, M, N, &c. On prolonge de même de FN vers CK, les côtez BF, FE, ED, &c. jusqu'à la rencontre en R, P, G, &c. des directions aussi (*Hyp.*) paralleles entre-elles EM, DL, CK, &c. des poids M, L, K, &c. FIG. 80.

Alors le Corol. 1. donnant $\begin{cases} K. L : : DH. CG. \\ L. M : : EQ. DP. \\ M. N : : FS. ER. \end{cases}$

L'on aura en mult. par ordre. $\begin{cases} K. N : : DH \times EQ \times FS. CG \times DP \times ER. \\ L. N : : EQ \times FS. DP \times ER. \\ K. M : : DH \times EQ. CG \times DP. \end{cases}$

Et toûjours de même, quelque nombre de poids quelconques de directions paralleles entr'elles, qu'on suppose ainsi suspendus à autant de points aussi quelconques d'une corde lâche & parfaitement flexible, attachée par les ex-

trêmitez à deux clous ou crochets, telle qu'on suppose ici ACDEFB.

THEOREME IX.

Fig. 81. 82. 83. 84. 85. I. *La corde lâche & parfaitement flexible ACDB du précedent Th. 8. demeurant attachée par les deux bouts aux deux clous ou crochets A, B, soient encore deux puissances quelconques K, L, dirigées comme l'on voudra, appliquées à deux points aussi quelconques C, D, de cette corde entre ces deux clous ou crochets A, B. D'un point S pris à volonté dans le plan du polygone ACDB, que ces deux puissances avec ces deux clous font faire à cette corde, soient S*e, *S*f, *S*g, *perpendiculaires en* e, f, g, *aux trois côtez prolongez AC, CD, DB de ce polygone; de plus à une des directions des deux puissances K, L, par exemple, à la direction CK de la puissance K, soit faite EF perpendiculaire en* k, *& rencontrée en E, F, par S*e, *S*f, *S*g, *prolongées jusqu'à elle; enfin du point F soit FG perpendiculaire en* l *à la direction DL de l'autre puissance L, & qui rencontre S*g *en G.*

Cela fait, je dis qu'en cas d'équilibre la puissance K sera à la puissance L, comme EF est à FG; c'est-à-dire, K. L :: EF. FG.

II. *Reciproquement la corde ACDB étant donnée de position, c'est-à-dire, le polygone qu'elle forme étant donné, si d'un point S pris à volonté dans le plan de ce polygone ACDB, on fait SE, SF, FG, perpendiculaires en* e, f, g, *à ses côtez AC, CD, DB, prolongez, & de rapports quelconques entr'elles; deux puissances K, L, dirigées suivant CK, DL, perpendiculaires aux bases EF, FG, des deux triangles ESF, FSG, & entr'elles comme ces bases, retiendront la corde ACDB dans cette position donnée, y demeurant en équilibre entr'elles.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Dans le cas d'équilibre que cette part. 1. suppose, les deux forces dont chacun des cordons AC, CD,

DB, eſt tiré directement en ſens contraires, ſoient appellées *e* chacune des deux forces dont le cordon AC eſt tiré de A vers C, & de C vers A; *f*, chacune des deux dont le cordon CD eſt tiré de C vers D, & de D vers C; *g*, chacune des deux dont le cordon DB eſt tiré de D vers B, & de B vers D.

Cela poſé, puiſque (*conſtr.*) les trois côtez SE, EF, SF, du triangle ESF ſont ici perpendiculaires aux directions (prolongées s'il eſt neceſſaire) CA, CK, CD, des trois forces *e*, K, *f*; ces trois côtez doivent être ici entr'eux (*Théoreme* 1. *Corollaire* 7.) comme ces trois forces. De même puiſque (*conſtr.*) les trois côtez SF, FG, CS, du triangle FSG, ſont pareillement ici perpendiculaires aux directions DC, DL, DB, des trois forces *f*, L, *g*; ces trois côtez doivent être auſſi entr'eux comme ces trois forces. Donc K. *f*: : EF. FS. Et *f*. L : : FS. FG. Donc auſſi (en raiſon ordonnée) K. L : : EF. FG. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

PART. II. Premierement, puiſque les clous ou crochets A, B, ſont (*Hyp.*) chacun d'une réſiſtance invincible, il eſt manifeſte que les puiſſances K, L, gardant toûjours les mêmes directions CK, DL, doivent ſe mettre tôt ou tard en équilibre entr'elles dans quelque poſition de la corde ACB. Secondement, pour voir que cette poſition ne peut être autre que l'a donnée ACDB, il faut conſiderer qu'aucun des deux angles ACD, CDB, ne peut ici augmenter ni diminuer, à moins que l'autre au contraire ne diminue ou augmente en même tems. Mais ſi l'angle, par exemple, ACD augmentoit, la direction CK demeurant (*Hyp.*) la même, ſon complement ESF (à deux droits) diminueroit; les collateraux ACK, DCK, diminueroient auſſi, la direction CK demeurant (*Hyp.*) la même; au contraire leurs complemens (à deux droits) SEF, SFE, augmenteroient l'un & l'autre: de ſorte qu'alors le rapport de EF à FS, diminueroit. Au contraire l'angle CDB, qui diminueroit alors, feroit augmenter ſon complement FSG à deux droits, auſſi-bien que ſes collate-

raux CDL, BDL, la direction DL demeurant (*Hyp.*) la même, & diminuer leurs complemens SFG, SGF, à deux droits : de ſorte qu'alors le rapport de SF à FG diminueroit auſſi.

Donc en cas de changement des angles ACD, CDB, les rapports de EF à FS, &c. FS à FG diminueroient tous deux ; & conſequemment le rapport de EF à FG diminueroit auſſi. Donc les puiſſances K, L, ſuppoſées entre-elles dans ce dernier rapport, ſeroient alors en équilibre ſans être entr'elles comme EF à FG ; ce que la part. 1. fait voir être impoſſible. Donc il eſt impoſſible auſſi que ces deux puiſſances K, L, dirigées ſuivant CK, DL, perpendiculaires (*Hyp.*) à EF, FG, & entr'elles (*Hyp.*) comme ces lignes EF, FG, ne demeurent pas en équilibre entr'elles dans la poſition donnée ACDB de la corde ACB. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

COROLLAIRE I.

Fig. 86. 87. 88. Soient preſentement tant de puiſſances quelconques K, L, M, N, &c. qu'on voudra, appliquées ſuivant telles directions CK, DL, PM, QN, &c. qu'on voudra auſſi, à autant de points quelconques C, D, P, Q, &c. de la corde lâche & parfaitement flexible ACDB attachée par les deux bouts à deux clous ou crochets A, B, & en équilibre entr'elles. D'un point S pris à volonté ſur le plan du polygone ACDPQB que ces puiſſances font former (*Th.* 1. *Corol.* 11.) à cette corde, ſoient ſur tous les côtez AC, CD, DP, PQ, QB, &c. de ce polygone autant de perpendiculaires S*e*, S*f*, S*g*, S*h*, S*r*, &c. qui les rencontrent (prolongez ou non) en autant de points *e*, *f*, *g*, *h*, *r*, &c. Après cela ſur une quelconque CK des directions des puiſſances K, L, M, N, &c. ſoit menée une perpendiculaire EF qui la rencontre en *k*, & qui rencontre auſſi en E, F, les droites S*e*, S*f*, prolongées juſqu'à elle, s'il eſt neceſſaire. Du point F ſoit FG perpendiculaire en *l* à la direction DL de la puiſſance ſuivante L, & qui rencontre S*g* en G. De ce point G ſoit auſſi GH perpendiculaire

diculaire en *m* à la direction PM de la puissance suivante M, & qui rencontre S*h* prolongée en H. De ce point H soit pareillement HR perpendiculaire en *n* à la direction QN de la puissance suivante N, & qui rencontre S*r* prolongée en R; & toûjours de même, quelque nombre de puissances quelconques qu'il puisse y avoir ici en équilibre ainsi entr'elles.

Cela fait, il suit de la part. 1. du present Th. 9. qu'en cas d'équilibre entre toutes ces puissances K, L, M, N, &c. elles seront entr'elles comme les lignes correspondantes EF, FG, GH, HR, &c. perpendiculaires (*Hyp.*) à leurs directions. Car l'équilibre supposé rendant ici le point P immobile comme s'il étoit fixe ainsi que le point A, la part. 1. du present Th. 9. fait voir que K. L :: EF. FG. Le même équilibre rendant pareillement les points C, Q, immobiles comme s'ils étoient fixes, cette part. 1. du present Th. 9. donnera de même L. M :: FG. GH. Par la même raison elle donnera pareillement M. N :: GH. HR. Et toûjours de même, quelque nombre de puissances quelconques dirigées à volonté, qu'on suppose ici en équilibre entr'elles.

Donc { K. L :: EF. FG.
L. M :: FG. GH.
M. N :: GH. HR.
&c.

Par consequent (en raison ordonnée) toutes ces puissances K, L, M, N, &c. seront ici entr'elles comme les lignes correspondantes EF, FG, GH, HR, &c. perpendiculaires à leurs directions. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE II.

Toutes ces lignes EF, FG, GH, HR, &c. étant ici (*constr.*) perpendiculaires en *k*, *l*, *m*, *n*, &c. aux directions CK, DL, PM, QN, &c. de toutes les puissances K, L, M, N, &c. chacune à chacune; il est manifeste FIG. 88.

que si ces directions sont toutes paralleles entr'elles, comme dans la Fig. 88. toutes leurs perpendiculaires EF, FG, GH, HR, &c. ne feront alors ensemble qu'une seule & même ligne droite OI, de laquelle elles seront autant de parties. Donc (*Corol.* 1.) les puissances K, L, M, N, &c. supposées en équilibre entr'elles, seront aussi pour lors entr'elles comme les parties correspondantes EF, FG, GH, HR, &c. de la droite OI perpendiculaire à toutes leurs directions. D'où l'on voit dans la Fig. 88. que des poids K, L, M, N, &c. de directions paralleles entr'elles, & ainsi en équilibre entr'eux, seroient aussi entr'eux comme ces parties correspondantes EF, FG, GH, HR, &c. de la droite OI perpendiculaire à leurs directions.

COROLLAIRE III.

Fig. 86. 87. 88. Le reciproque des deux précedens Corol. 1. 2. se démontrera comme la part. 2. de ce Théoreme-ci : sçavoir, que la corde ACDPQB étant donnée de position, c'est-à-dire, le polygone quelconque qu'elle forme, étant donné, si d'un point pris à volonté sur le plan de ce polygone, on mene SE, SF, SG, SH, SR, &c. perpendiculaires en *e*, *f*, *g*, *h*, *r*, &c. à ses côtez AC, CD, DP, PQ, QB, &c. & de rapports quelconques entr'elles ; si l'on applique aux angles C, D, P, Q, &c. de ce polygone, suivant des directions CK, DL, PM, QN, &c. perpendiculaires aux bases (prolongées ou non) EF, FG, GH, HR, &c. des triangles ESF, FSG, GSH, HSR, &c. autant de puissances K, L, M, N, &c. lesquelles soient entr'elles comme ces bases ; toutes ces puissances retiendront ensemble la corde ACB dans la position donnée ACDPQB, y demeurant en équilibre entr'elles.

Car premierement les clous ou crochets A, B, étant chacun (*Hyp.*) d'une résistance invincible, il est manifeste que toutes ces puissances doivent tôt ou tard se mettre en équilibre entr'elles dans quelque position de la corde ACB. Secondement, cette position ne peut être autre que

la donnée ACDPQB; puisque si quelqu'un de ses angles, par exemple, ACD, augmentoit ou diminuoit, un raisonnement semblable à celui de la démonstration de la part. 2. fera voir que quelqu'un des autres angles du polygone donné, diminueroit ou augmenteroit, & peut-être plusieurs: mais un nous suffit pour faire voir qu'alors les perpendiculaires EF, FG, GH, HR, &c. aux directions données des puissances K, L, M, N, &c. ne seroient plus en raison de ces puissances; & qu'ainsi ces mêmes puissances pourroient ici faire équilibre entr'elles, sans être en raison de ces lignes; ce qui est impossible par le Corol. 1. Donc il est pareillement impossible que ces puissances, telles qu'on les vient de supposer, ne demeurent pas en équilibre entr'elles dans la position donnée ACDPQB de la corde ACB. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE IV.

Il suit de-là en particulier dans la Fig. 88. que des poids K, L, M, N, &c. de directions paralleles entr'elles, appliqués aux angles C, D, P, Q, &c. d'un polygone quelconque ACDPQB formé par une corde ACB de position donnée, & entr'eux comme les parties EF, FG, GH, HR, &c. marquées sur une droite OI perpendiculaire aux directions de ces poids, par les droites SE, SF, SG, SH, SR, &c. menées d'un point S pris à volonté sur le plan de ce polygone, perpendiculairement en *e*, *f*, *g*, *h*, *r*, &c. à ses côtez AC, CD, DP, PQ, QB, &c. prolongez ou non: il suit, dis-je, du précedent Corol. 3. que tous ces poids retiendront ensemble cette corde ACB dans cette position donnée ACDPQB en équilibre entr'eux, ou qu'ils la lui donneroient, si elle ne l'avoit pas. FIG. 88.

COROLLAIRE V.

Donc si le polygone étoit d'une infinité de côtez, c'est-à-dire, si la corde ACB formoit une courbe quelconque donnée ACDPQB, dont les tangentes fussent consequemment les côtez infiniment petits prolongez AC, CD, DP,

PQ, QB, &c. de ce polygone infinilatere ; que d'un point quelconque S pris à volonté sur le plan de ce polygone ou de cette courbe ACDPQB on supposât des perpendiculaires SE, SF, SG, SH, SR, &c. à toutes ces tangentes en *e*, *f*, *g*, *h*, *r*, &c. & qui rencontrassent en autant de points E, F, G, H, R, &c. une droite quelconque OI perpendiculaire en *k*, *l*, *m*, *n*, &c. à des directions CK, DL, PM, QN, &c. paralleles entr'elles de poids K, L, M, N, &c. suspendus aux angles ou points C, D, P, Q, &c. de concours des tangentes contigues de la courbe donnée ACDPQB, & que ces poids fussent entr'eux comme les parties correspondantes EF, FG, GH, HR, &c. de la droite OI : il suit, dis-je, du précedent Corol. 4. que ces poids en cette raison, & ainsi appliqués à la corde ACB, la retiendroient ensemble dans la courbure donnée ACDPQB, ou la lui donneroient si elle ne l'avoit pas.

COROLLAIRE VI.

FIG. 89. Cela étant, si la position donnée de la corde ACB étoit, par exemple, un arc quelconque de cercle ACDPQB, égal ou moindre que le quart de cette courbe, dont S fût le centre, & A le plus bas de tous les points, auquel elle fût attachée comme en B dans un plan vertical, & touchée par l'horisontale AI on OI ; qu'aux extrêmitez C, D, P, Q, &c. de ses parties égales infiniment petites AC, CD, DP, PQ, &c. de cet arc (qui regardé comme un polygone infinilatere regulier, ait ses points pour ses angles, & ses petites parties pour ses côtez) fussent suspendus autant de poids K, L, M, N, &c. de directions toutes perpendiculaires en *k*, *l*, *m*, *n*, &c. à la tangente horisontale OI, & qui fussent entr'eux comme les parties EF, FG, GH, HR, &c. marquées sur cette tangente par les secantes SE, SF, SG, SH, SR, &c. perpendiculaires aux milieux *e*, *f*, *g*, *h*, *r*, &c. des elemens égaux AC, CD, DP, PQ, QB, &c. de l'arc circulaire donné ACDPQB : si tout cela (dis-je) étoit ainsi, il suit du précedent Corol. 5. que ces poids K, L, M, N,

&c. ainsi en raison des differences EF, FG, GH, HR, &c. des tangentes AE, AF, AG, AH, AR, &c. des arcs circulaires Ae, Af, Ag, Ah, Ar, &c. retiendroient ensemble la corde ACB dans la position ou courbure circulaire donnée ACDPQB, ou la lui donneroient si elle ne l'avoit pas.

COROLLAIRE. VII.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans tous les Corollaires précedens, ces six Corollaires faisant voir que pour que les puissances K, L, M, N, &c. quelques directions qu'elles ayent, retiennent ensemble la corde ACB dans la courbure quelconque donnée ACDPQB, ou qu'ils la lui donnent si elle ne l'a pas; il faut que ces puissances K, L, M, N, &c. soient entr'elles comme les lignes EF, FG, GH, HR, &c. perpendiculaires à leurs directions, & terminées par des perpendiculaires menées d'un même point quelconque S, pris sur le plan de cette courbure ou polygone ACDPQB, à ses côtez AC, CD, DP, PQ, QB, &c. lesquels prolongez se trouvent tangentes de la courbe en laquelle ce polygone se réduit, lorsqu'il devient infinilatere, aux angles ou concours C, D, P, Q, &c. desquels côtez pris deux à deux contigus, ces puissances sont appliquées: il suit necessairement de tous ces Corol. 1. 2. 3. 4. 5. 6. qu'alors $\frac{EF}{K}$, $\frac{FG}{L}$, $\frac{GH}{M}$, $\frac{HR}{N}$, &c. doivent être autant de fractions constantes égales entr'elles; & reciproquement que lorsqu'elles seront telles, les puissances K, L, M, N, &c. ainsi appliquées doivent demeurer en équilibre entr'elles, & retenir la corde ACB dans la courbure qui aura donné les numerateurs de ces fractions en raison de ces puissances, ou lui donner cette courbure si elle ne l'a pas. FIG. 86. 87. 88. 89.

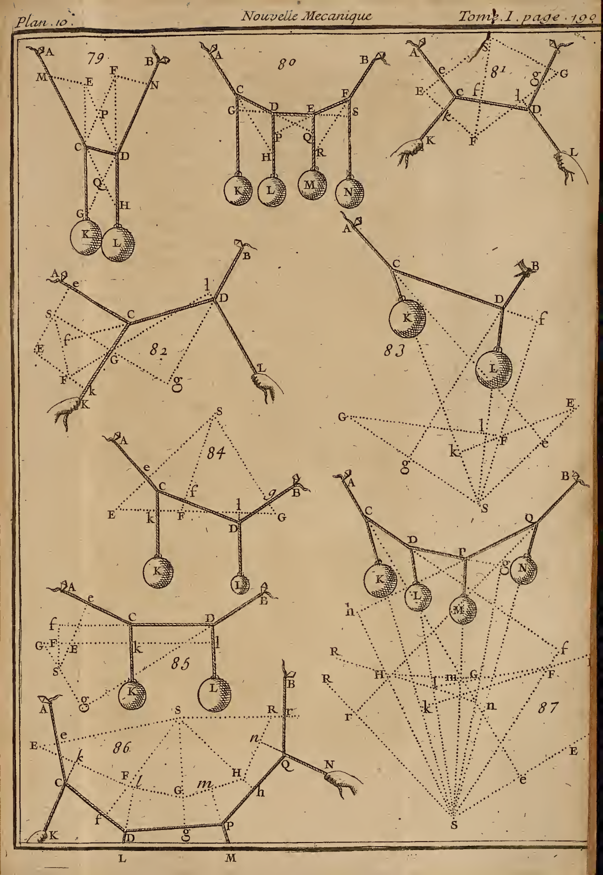
COROLLAIRE VIII.

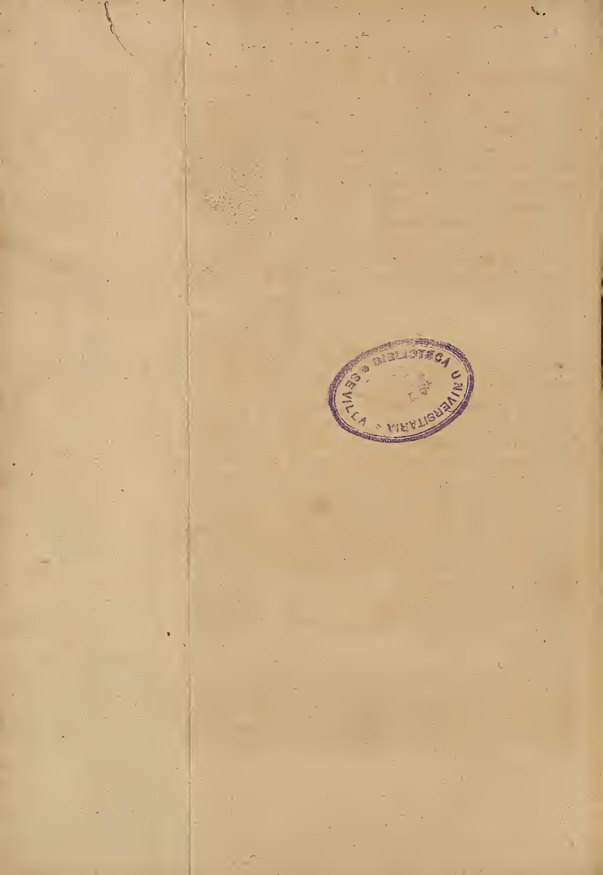
Donc conformément aux Corol. 2. 4. 5. 6. lorsque les directions CK, DL, PM, QN, &c. des poids K, L, M, N, &c. sont paralleles entr'elles, comme dans les Fig. FIG. 88. 89.

88. 89. les perpendiculaires EF, FG, GH, HR, &c. à ces directions, ne faisant alors qu'une seule & même ligne droite OI perpendiculaire à toutes ces mêmes directions ; il faut, pour que ces poids retiennent la corde ACB dans la courbure donnée ACDPQB non seulement (*Corol.* 7.) que les fractions $\frac{EF}{K}$, $\frac{FG}{L}$, $\frac{GH}{M}$, $\frac{HR}{N}$, &c. soient constantes & toutes égales entr'elles, mais encore que leurs numerateurs EF, FG, GH, HR, &c. soient autant de parties d'une même ligne droite OI perpendiculaire aux directions de ces poids, marquées sur elle par des perpendiculaires menées d'un même point quelconque S aux côtez du polygone ou aux tangentes de la courbe ACDPQB que la corde doit former par l'action de ces poids appliquez chacun au concours de deux tangentes contigues, c'est-à-dire, aux angles du polygone qui dégenere en cette courbe. Reciproquement lorsque ces fractions seront telles, les poids K, L, M, N, &c. ainsi suspendus aux angles ou concours C, D, P, Q, &c. des côtez ou tangentes contigues de ce polygone ou de cette courbe ACDPQB, doivent (*Corol.* 7.) demeurer en équilibre entr'eux, & retenir la corde ACB dans cette courbure, ou la lui donner si elle ne l'a pas.

THEOREME X.

FIG. 90. 91. I. *Deux puissances quelconques K, L, dirigées à volonté, & appliquées en deux points quelconques C, D, d'une corde lâche & parfaitement flexible ACDB, attachée par les deux bouts à deux clous ou crochets A, B, demeurant encore en équilibre entr'elles, comme dans les Th. 8. 9. d'un point quelconque S soient faites SE, SF, SG, paralleles aux trois côtez AC, CD, DB, du polygone ACDB que ces puissances font faire à cette corde ; & d'un point F pris aussi à volonté sur SF, soient menées FE, FG, paralleles aux directions CK, DL, des puissances K, L, jusqu'à ce que ces deux lignes rencontrent SE, SG, en E, G. Cela fait, je dis qu'en ce cas d'é-*


79
80
81
82
83
84
85
86
87


BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
SEVILLA

quilibre les puissances K, L, seront entr'elles comme EF, FG, c'est-à-dire, K. L : : EF. FG.

II. *Reciproquement la corde ACDB étant donnée de position, c'est-à-dire, le polygone qu'elle forme étant donné, si d'un point S pris à volonté, on fait SE, SF, SG, parallele aux trois côtez AC, CD, DB, de ce polygone; & que d'un point F pris aussi à volonté sur SF, on mene deux droites quelconques FE, FG, qui rencontrent SE, SG en E, G: deux puissances K, L, qui seroient entr'elles comme ces deux lignes FE, FG, & qui auroient leurs directions CK, DL, paralleles à ces mêmes lignes, chacune à chacune; retiendront la corde ACDB dans cette position donnée, y demeurant en équilibre entr'elles.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Soient encore appellez *e*, *f*, *g*, comme dans la démonstrat. de la part. 1. du Th. 9. les forces dont les cordons AC, CD, DB, sont ici tirez chacun également en sens directement contraires. Le triangle ESF ayant ici (*constr.*) les trois côtez SE, EF, SF, paralleles aux directions CA, CK, CD, des trois forces *e*, K, *f*, (*Hyp.*) en équilibre entr'elles; ces trois côtez du triangle ESF seront ici entr'eux (*Th.* 1. *Corol.* 7.) comme ces trois forces. De même le triangle SFG ayant pareillement (*constr.*) les trois côtez SF, FG, GS, paralleles aux directions DC, DL, DB, des trois forces *f*, L, *g*, ces trois côtez du triangle SFG seront aussi entr'eux (*Th.* 1. *Corol.* 7.) comme ces trois forces. Donc K. *f* : : EF. FS. Et *f*. L : : FS. FG. Par consequent (en raison ordonnée) K. L : : EF. FG. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

PART. II. Cette seconde se démontrera comme la seconde du Théoreme 9.

COROLLAIRE I.

Soient presentement tant de puissances K, L, M, N, &c. qu'on voudra appliquées suivant telles directions CK, DL, PM, QN; qu'on voudra aussi, à autant de FIG. 92. 93.

points quelconques C, D, P, Q, &c. de la corde lâche & parfaitement flexible ACB, & en équilibre entr'elles. D'un point quelconque S soient menées SE, SF, SH, SR, &c. paralleles aux côtez AC, CD, DP, PQ, QB, &c. chacune à chacun, du polygone ACDPQB que ces puissances K, L, M, N, &c. font former (*Th.* 1. *Cor.* 11.) à cette corde ACB. Soient aussi EF, FG, GH, HR, &c. paralleles aux directions CK, DL, PM, QN, &c. de ces mêmes puissances, & qui rencontrent SE, SF, SG, SH, SR, &c. en E, F, G, H, R, &c.

Cela fait, il suit de la part. 1. du present Th. 10. qu'en ce cas d'équilibre entre toutes ces puissances K, L, M, N, &c. elles seront entr'elles comme les lignes EF, FG, GH, HR, &c. paralleles à leurs directions. Car l'équibre supposé rendant ici le point D immobile comme s'il étoit fixe, ainsi que le point A, la part. 1. du present Th. 10. donne K. L :: EF. FG. Le même équilibre rendant pareillement les points C, P, immobiles comme s'ils étoient fixes, cette part. 1. du present Théor. 10. donnera de même L. M :: FG. GH. Par la même raison elle donnera aussi M. N :: GH. HR. Et toûjours de même, quelque nombre de puissances quelconques dirigées à volonté qu'on puisse supposer ainsi en équilibre entr'elles.

Donc { K. L :: EF. FG.
L. M :: FG. GH.
M. N :: GH. HR.
&c.

Par consequent (en raison ordonnée) toutes ces puissances K, L, M, N, &c. seront ici entr'elles comme les lignes correspondantes EF, FG, GH, HR, &c. paralleles à leurs directions.

COROLLAIRE II.

F. 10. 93. Toutes ces lignes EF, FG, GH, HR, &c. étant ici (*constr.*) paralleles aux directions CK, DL, PM, QN, &c. de toutes les puissances K, L, M, N, &c. chacune à chacune;

cune ; il eſt manifeſte que ſi toutes ces directions ſont paralleles entr'elles, toutes leurs paralleles EF, FG, GH, HR, &c. ne feront alors enſemble qu'une ſeule & même ligne droite OI, de laquelle elles ſeront autant de parties. Donc (*Corol.* 1.) les puiſſances K, L, M, N, &c. ſuppoſées en équilibre entr'elles, ſeront auſſi pour lors entr'elles comme les parties correſpondantes EF, FG, GH, HR, &c. de cette ligne droite OI parallele à toutes & à chacune de leurs directions. D'où l'on voit dans la Fig. 93. que des poids K, L, M, N, &c. de directions paralleles entr'elles, & ainſi en équilibre entr'eux, ſeroient auſſi entr'eux comme ces parties correſpondantes EF, FG, GH, HR, &c. de la droite OI parallele à leurs directions.

COROLLAIRE III.

Le reciproque des deux précedens Corol. 1. 2. ſuit de la part. 2. du preſent Th. 10. & ſe démontrera comme le Corol. 3. du Th. 9. ſçavoir, que la corde ACB étant donnée de poſition ACDPQB, c'eſt-à-dire, le polygone quelconque qu'elle forme, étant donné ; ſi d'un point quelconque S on mene SE, SF, SG, SH, SR, &c. paralleles à ſes côtez AC, CD, DP, PQ, QB, &c. & de rapports quelconques entr'elles ; ſi l'on applique enſuite aux angles C, D, P, Q, &c. de ce polygone, ſuivant des directions CK, DL, PM, QN, &c. paralleles aux baſes EF, FG, GH, HR, &c. des triangles ESF, FSG, GSH, HSR, &c. autant de puiſſances K, L, M, N, &c. leſquelles ſoient entr'elles comme ces baſes ; toutes ces puiſſances retiendront enſemble la corde ACB dans la poſition donnée ACDPQB, en équilibre entr'elles ; ou elles la lui donneroient, ſi elle ne l'avoient pas. Cela, dis-je, ſe démontrera comme le Corol. du Th. 9. FIG. 92. 93.

COROLLAIRE IV.

Il ſuit en particulier dans la Fig 93. que des poids K, L, M, N, &c. de directions paralleles entr'elles, appli- FIG. 93.

quées aux angles C, D, P, Q, &c. d'un polygone quelconque ACDPQB formé par une corde ACB de position donnée, & entr'eux comme les parties EF, FG, GH, HR, &c. marquées sur une droite OI parallele aux directions de ces poids, par les droites SE, SF, SG, SH, SR, &c. menées d'un point quelconque S paralleles aux côtez AC, CD, DP, PQ, QB, &c. de ce polygone: il suit, dis-je, du précedent Corol. 3. que tous ces poids retiendront ensemble la corde ACB dans la position donnée ACDPQB en équilibre entr'eux; ou qu'ils la lui donneroient, si elle ne l'avoit pas.

COROLLAIRE. V.

Donc si ce polygone étoit d'une infinité de côtez, c'est-à-dire, si la corde ACB formoit une courbe quelconque ACDPQB, dont les tangentes fussent consequemment les côtez infiniment petits prolongez AC, CD, DP, PQ, QB, &c. de ce polygone infinilatere; que d'un point quelconque S on supposât des paralleles SE, SF, SG, SH, SR, &c. à toutes ces tangentes, & qui rencontrassent en autant de points E, F, G, H, R, &c. une ligne droite quelconque OI, parallele aux directions CK, DL, PM, QN, &c. des poids K, L, M, N, &c. suspendus aux angles ou points C, D, P, Q, &c. de concours des tangentes contigues de la courbe données ACDPQB, & que ces poids fussent entr'eux comme les parties correspondantes EF, FG, GH, HR, &c. de la droite OI: il suit, dis-je, du précedent Corol. 4. que ces poids en cette raison, & appliqués à la corde ACB, la retiendroient ensemble dans la courbure donnée, ou la lui donneroient, si elle ne l'avoit pas.

COROLLAIRE VI.

D'où l'on voit que si les points (infiniment proches les uns des autres) C, D, P, Q, &c. de cette corde ACB, jusqu'ici regardée comme sans pesanteur, avoient effectivement des pesanteurs de directions paralleles entre-

elles, & en raison des parties EF, FG, GH, HR, &c. marquées comme dans le Corol. 5. sur la droite OI parallele à toutes ces directions; cette corde (*Hyp.*) parfaitement flexible ACB prendroit d'elle-même la courbure donnée ACDPQB.

COROLLAIRE VII.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans tous les Corollaires précedens, ces six Corollaires faisant voir que pour que les puissances K, L, M, N, &c. quelques directions qu'elles ayent, retiennent ensemble la corde ACB dans une courbure quelconque donnée ACDPQB, il faut que ces puissances K, L, M, N, &c. soient entr'elles comme les lignes EF, FG, GH, HR, &c. paralleles à leurs directions, & terminées par des paralleles menées d'un même point quelconque S, aux côtez AC, CD, DP, PQ, QB, &c. de ce polygone, lesquels prolongez sont tangentes de la courbe en laquelle il se réduit quand il devient infinilatere, aux angles ou concours C, D, P, Q, &c. desquels côtez, pris deux à deux contigus, ces puissances K, L, M, N, &c. sont appliquées: il suit, dis-je, des Corol. 1. 2. 3. 4. 5. 6. qu'alors $\frac{EF}{K}$, $\frac{FG}{L}$, $\frac{GH}{M}$, $\frac{HR}{N}$, &c. doivent être autant de fractions constantes toutes égales entr'elles; & réciproquement que lorsqu'elles seront telles, les puissances K, L, M, N, &c. ainsi appliquées doivent demeurer en équilibre entr'elles, & retenir ensemble la corde ACB dans la courbure ACDPQB qui aura donné les numerateurs de ces fractions, ou lui donner cette courbure, si elle ne l'avoit pas. FIG. 92. 93.

COROLLAIRE VIII.

Donc conformément aux Corol. 2. 4. 5. 6. lorsque les directions CK, DL, PM, QN, &c. des poids K, L, M, N, &c. sont paralleles entr'elles, comme dans la Fig. 93. les paralleles EF, FG, GH, HR, &c. à ces directions, ne faisant plus alors qu'une seule & même ligne droite FIG. 93.

OI parallele à ces mêmes directions; il faut pour que ces poids retiennent la corde ACB dans la courbure donnée ACDPQB, non seulement (*Corol.* 7.) que les fractions $\frac{EF}{K}, \frac{FG}{L}, \frac{GH}{M}, \frac{HR}{N}$, &c. soient constantes & toutes égales entr'elles, mais encore que leurs numerateurs EF, FG, GH, HR, &c. soient autant de parties marquées sur une même ligne droite OI parallele aux directions de ces poids, par des paralleles menées d'un même point S aux côtez du polygone, ou aux tangentes de la courbe ACDPQB que la corde doit former: reciproquement lorsque ces fractions seront telles, les poids K, L, M, N, &c. ainsi suspendus aux angles ou concours C, D, P, Q, &c. des côtez ou tangentes contigues de ce polygone ou de cette courbure ACDPQB, doivent demeurer en équilibre entr'eux, & retenir la corde ACB dans cette courbure donnée, ou la lui donner, si elle ne l'a pas.

Lorsqu'on a parlé ci-dessus de courbures quelconques ACDPQB, données ou non, de la corde ACB, il est visible qu'on n'y a compris que des courbures telles que des puissances ou des poids qui lui seroient appliquez, lui pourroient donner; & consequemment toutes convexes du côté vers lequel tendent les poids ou les puissances qui la tirent en même sens.

THEOREME XI.

FIG. 94. *Soit encore une corde lâche parfaitement flexible ACDPQB, attachée par ses extrêmitez à deux clous ou crochets A, B, laquelle soit tirée en C, D, P, Q, &c. par tant de puissances K, L, M, N, &c. qu'on voudra, en équilibre entr'elles suivant des directions quelconques EK, FL, GM, HN, &c. je dis qu'en ce cas d'équilibre la résistance du clou A sera toûjours à celle du clou B, comme le produit des sinus des angles faits du côté de B par ces directions avec la corde ACDPQB, sera au produit des sinus de ce qu'elles font d'autres angles avec cette corde du côté de A.*

DÉMONSTRATION.

Soient e, f, g, &c. les forces de tensions dont les parties intermediaires CD, DP, PQ, &c. de la corde sont tirées suivant leurs longueurs par le concours des puissances K, L, M, N, &c. soient aussi A, B, les résistances que leur font les clous de ces noms. Soit enfin $ſ$ la caractéristique ou la marque des sinus des angles que les directions des puissances font avec la corde qu'elles courbent en polygone quelconque ACDPQB.

Cela posé, le Cor. 1. du Th. 2. donne $\left\{\begin{array}{l} A.e :: ſECD.ſECA. \\ e.f :: ſFDP.ſFDC. \\ f.g :: ſGPQ.ſGPD. \\ g.B :: ſHQB.ſHQP. \\ \&c. \end{array}\right.$

Donc (en multipliant par ordre) $A.B :: ſECD \times ſFDP \times ſGPQ \times ſHQB \times \&c. ſECA \times ſFDC \times ſGPD \times ſHQP \times \&c.$ *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Il suit de-là que si les directions EK, FL, GM, HN, &c. des puissances K, L, M, N, &c. divisent chacune en deux également chacun des angles ACD, CDP, DPQ, PQB, &c. de la corde, au travers desquels ces directions passent; cette corde sera bandée par tout d'égale force dans toute sa longueur ACDPQB; & les résistances A, B, des clous de ces noms, seront égales entr'elles; c'est-à-dire, qu'alors on aura $A=e=f=g=B=\&c.$ Car cette égalité d'angles en chacun des points C, D, P, Q, rendant $ſECD=ſECA$, $ſFDP=ſFDC$, $ſGPQ=ſGPD$, $ſHQB=ſHQP$, rendra aussi (suivant les premieres analogies de la démonstration précedente) $A=e$; $e=f$, $f=g$, $g=B$, &c. Et par consequent $A=e=f=g=B=\&c.$ ainsi qu'on le vient de dire.

COROLLAIRE II.

FIG. 95. Si au contraire les directions EK, FL, GM, HN, &c. des puissances K, L, M, N, &c. sont toutes paralleles entr'elles; les résistances A, B, des clous de ces noms, seront en raison reciproque des sinus des angles ECA, HQB, que leurs cordons feront avec les directions EK, HN, des puissances K, N, qui leur sont plus voisines; c'est-à-dire, qu'alors on aura A. B :: sHQB. sECA. Puisque ce parallelisme rendant sECD=sFDC, sFDP=sGPD, sGPQ=sHQP, &c. l'analogie conclue dans la démonstration précedente, doit se réduire ici à A. B :: sHQB. sECA.

THEOREME XII.

FIG. 96. *Soit encore la corde lâche & parfaitement flexible ACPB attachée par ses extrêmitez à deux clous ou crochets A, B, & bandée en polygone quelconque ACDPQB par tant & telles puissances K, L, M, N, &c. qu'on voudra, appliquées suivant telles directions CK, DL, PM, QN, &c. qu'on voudra aussi, aux angles ou points C, D, P, Q, &c. de la corde que ces puissances en équilibre entr'elles disposent ainsi en polygone ACDPQB. Soient R, S, T, &c. les points où les côtez prolongez PD, QP, BQ, &c. de ce polygone rencontrent son premier côté AC prolongé. Soient E le point où les directions KC, LD, prolongées se rencontrent; F celui où RE, MP, prolongées se rencontrent aussi; G, un pareil point de rencontre entr'elles de SF, NQ, prolongées de même, &c. Cela posé, je dis,*

I. *Que si N est (comme ici) la derniere des puissances supposées, la droite GT sera leur direction commune, c'est-à-dire* (Déf. 7.) *la direction de l'effort resultant du concours de toutes ces puissances K, L, M, N, contre les clous A, B.*

II. *Que cet effort commun sera aux résistances de ces clous A, B, comme le sinus de l'angle total ATB aux sinus des angles partiaux GTB, GTA.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Les Corol. 19. & 20. du Lem. 3. font voir que l'effort résultant du concours des puissances K, L, est dirigé suivant ER ou FR ; que le résultant du concours de celui-ci & de la puissance M, est dirigé suivant FS ou GS ; que le résultant de celui-ci & de la puissance N est dirigé suivant GT ; & toûjours de même. Donc s'il n'y a (comme ici) que les quatre puissances K, L, M, N, l'effort résultant de leur concours total d'action contre les clous A, B, aura sa direction suivant GT. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

PART. II. Donc toutes ces puissances K, L, M, N, ne font ensemble contre les clous A, B, que comme une seule égale à l'effort résultant de leur concours, laquelle appliquée en T suivant la direction GT de cet effort, à une corde ATB, seroit soûtenuë par ces deux clous A, B. Or (*Th.* 1. *Corol.* 4.) cette nouvelle puissance suivant GT, seroit alors aux résistances de ces mêmes clous A, B, comme le sinus de l'angle ATB aux sinus des angles GTB, GTA. Donc l'effort résultant du concours d'action de toutes les puissances K, L, M, N, contre les clous A, B, est ici aux résistances de ces clous, comme le sinus de l'angle total ATB est aux sinus des angles partiaux GTB, GTA. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc en general (*part.* 1. 2.) si l'on prolonge le premier AC, & le dernier BQ, des côtez du polygone funiculaire supposé ACDPQB, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en quelque point T, & qu'on divise leur angle ATB en deux autres GTA, GTB, dont les sinus soient en raison reciproque des résistances des clous A, B, trouvées dans le Th. 11. c'est-à-dire, en deux autres angles GTA, GTB, tels que le sinus partial GTB soit au sinus de l'autre partial GTA, comme la résistance du clou A est à celle du clou B ; la droite GT qui divisera ainsi l'angle total ATB,

sera la direction de l'effort résultant du concours des puissances K, L, M, N, lequel effort (*Th.* 1. *Cor.* 4.) sera à chacune de ces résistances des clous A, B, comme le sinus de cet angle total à chacun des sinus des angles partiaux GTB, GTA : de sorte que si l'on appelle A, B, ces résistances des clous de ces noms, & qu'on prenne *ſ* pour la marque des sinus, l'un aura toûjours ici A. B : : *ſ*GTB. *ſ*GTA. Donc,

1°. Les résistances A, B, des clous ou crochets de ces noms étant trouvées suivant le Th. 11. si depuis T sur leurs directions TA, TB, on prend TV. TX : : A. B. & que de ces côtez TV, TX, on fasse le parallelogramme TVXG, l'on aura sa diagonale GT pour la direction commune de toutes les puissances K, L, M, N, c'est-à-dire, de la force résultante de leur concours : puis on aura pour lors A. B : : TV. TX (*Lemme* 8. *Corol.* 2.) : : *ſ*TGV. *ſ*GTA : : *ſ*GTB. *ſ*GTA. Ce que le nomb. 2. du Corol. 1. du Lem. 3. fait aussi voir.

2°. Reciproquement la direction commune GT des puissances K, L, M, N, c'est-à-dire, de la force (que j'appelle T) résultante de leur concours, étant trouvée suivant le present Th. 12. le parallelogramme TVGX d'une diagonale GT prise à volonté sur cette direction commune, & des côtez TV, TX, placez sur les directions TA, TB, des résistances A, B, donnera de même (*Lem.* 3. *Corol.* 1. *nomb.* 2.) VT, GT, XT, en raison de A, T, B; & conséquemment A. B : : TV. TX (*nomb.* 2.) : : *ſ*GTB. *ſ*GTA.

M. Bernoulli a trouvé la précédente direction commune GT d'une autre maniere dans son Essay de la Manœuvre des Vaisseaux, chap. 15. prop. 3. *où il l'appelle* Direction moyenne.

COROLLAIRE II.

On vient de voir dans le Corol. 1. du Th. 11. que lorsque les directions EK, EL, FM, GN, des puissances K, L, M, N, divisent chacune en deux parties égales

chacun

chacun des angles ACD, CDP, DPQ, PQB, qu'elles traversent ; les résistances des clous A, B, sont égales entr'elles. Donc alors (*Corol.* 1.) la direction GT de l'effort resultant du concours de toutes ces puissances, divise également en deux l'angle ATB compris entre les directions prolongées AC, BQ, de ces résistances ; & cet effort commun est à chacune de ces deux résistances, comme le sinus de l'angle ATB est au sinus de la moitié de cet angle.

COROLLAIRE III.

Le Corol. 2. du Th. 11. fait voir aussi que lorsque les directions EK, EL, FM, GN, des puissances K, L, M, N, sont toutes paralleles entr'elles, le sinus de l'angle GQB est au sinus de l'angle ECA, comme la résistance du clou A est à celle du clou B ; c'est-à-dire, en prenant encore A & B pour les noms de ces résistances, & *s* pour la marque des sinus ; qu'alors A. B : : *s*GQB. *s*ECA. Or en general (*Corol.* 1.) la direction GT de l'effort résultant de toutes ces puissances K, L, M, N, quelques directions qu'elles ayent, doit toûjours diviser l'angle ATB en deux autres GTA, GTB, tels qu'on ait toûjours A. B : : *s*GTB. *s*GTA. Donc en ce cas-ci de directions EK, EL, FM, GN, toutes paralleles entr'elles, l'on aura toûjours *s*GQB. *s*ECA : : *s*GTB. *s*GTA. Ce qui fait voir qu'en ce cas-ci la direction GT de l'effort résultant du concours des puissances K, L, M, N, de telles directions, doit toûjours être parallele à ces mêmes directions, conformément au Corol. 1. du Lem. 6. qui le pouvoit aussi démontrer. FIG. 97.

COROLLAIRE IV.

Imaginons presentement que le précedent polygone funiculaire devienne infinilatere, & dégenere ainsi en une courbe ACDB, comme dans la Figure 98. par l'action d'une infinité de puissances appliquées à tous les points de cette corde, ou par les pesan- FIG. 98.

teurs particulieres quelconques de toutes ses parties; soient aussi imaginées aux points A, B, de suspension deux tangentes AT, BT, de cette courbe ACDB, lesquelles se rencontrent en quelque point T. Cela posé,

1°. Si les pressions ou tractions de cette corde ACDB sont toutes perpendiculaires à sa courbure, le Corol. 2. fera voir que la ligne GT, qui divisera en deux également l'angle ATB compris entre ces deux touchantes AT, BT, sera la direction de l'effort résultant de tout ce qu'il a de forces qui courbent ainsi cette corde.

2°. Si les pressions ou tractions sont toutes paralleles entr'elles, telles qu'on suppose d'ordinaire toutes celles qui résulteroient à cette corde ADCB de l'action sur elle des differentes pesanteurs de toutes ses parties; le Corol. 3. fait aussi voir que la ligne GT parallele à toutes ces directions, seroit la direction de l'effort résultant du concours de toutes ces pesanteurs particulieres, ou d'autres forces quelconques qui, comme ces pesanteurs, agiroient sur cette corde ACDB suivant des directions toutes paralleles à celles-là.

THEOREME XIII.

FIG. 92. *Soit le précedent polygone funiculaire quelconque ACDPQB formé par l'action de tant de puissances K, L, M, &c. qu'on voudra, appliquées aux sommets C, D, P, &c. de ses angles suivant des directions EK, EL, FM, &c. lesquelles fassent présentement toutes d'un même côté, par exemple, vers A, avec les côtez adjacens AC, CD, DP, PQ, &c. des angles quelconques ACE, CDE, DPF, PQG, &c. tous égaux entr'eux, & dont les immediatement voisines se rencontrent deux à deux en E, F, &c. si l'on appelle* e, f, g, *&c. les forces dont les parties CD, DP, PQ, &c. de la corde polygone ACDFQB sont bandées ou tirées chacune suivant sa longueur; l'on aura par tout ici ces puissances* $K = \frac{e \times DC}{CE}$, $L = \frac{f \times DP}{ED}$, $M = \frac{g \times PQ}{GP}$, &c.

DEMONSTRATION.

Puisque les angles ACE, CDE, DPF, PQG, &c. sont (*Hyp.*) tous égaux entr'eux, il est manifeste que si l'on prolonge AC, CD, DP, PQ, &c. vers R, S, T, V, &c. l'on aura les angles DCR=DEC, PDS=PFD, QPT=QGP, &c. Cela étant, & les côtez d'un triangle rectiligne quelconque étant toûjours entr'eux (*Lem.* 8. *Cor.* 2.) comme les sinus des angles qui leur sont opposez,

Le Corol. 4. du Th. 1. donnera par tout ici

$$\begin{cases} K.e :: \int ACD.\int ACE :: \int DCR.\int CDE :: \int CED.\int CDE :: CD.CE. \\ L.f :: \int CDP.\int CDE :: \int PDS.\int DPF :: \int PFD.\int DPF :: DP.FD. \\ M.g :: \int DPQ.\int FPD :: \int QPT.\int GQP :: \int QGP.\int GQP :: PQ.GP. \end{cases}$$

&c.

Desquelles Analogies résultent $K=\frac{e\times CD}{CE}$, $L=\frac{f\times DP}{FD}$, $M=\frac{g\times PQ}{GP}$; &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

On voit de-là que si les côtez CD, DP, PQ, &c. du polygone funiculaire ACDPQB étoient en raison reciproque des forces e, f, g, &c. dont ils sont tirez chacun suivant sa longueur par le concours des puissances K, L, M, &c. Cette hypothese rendant par tout $e\times CD = f\times DP = g\times PQ =$ &c. de grandeur constante, laquelle soit prise pour l'unité, rendroit $K=\frac{1}{CE}$, $L=\frac{1}{FD}$, $M=\frac{1}{GP}$, &c. c'est-à-dire, que les puissances K, L, M, &c. seroient alors en raison reciproque des lignes CE, FD, GP, &c. qui leur répondent.

COROLLAIRE II.

FIG. 100. Si presentement on suppose que le précedent polygone funiculaire devienne infinitilatere, c'est-à-dire, une courbe quelconque APB par l'action d'une infinité de puissances qui lui soient appliquées en tous ses points suivant des directions toutes perpendiculaires à sa courbure, desquelles une soit (si l'on veut) celle GM de la puissance M perpendiculaire en P à la courbure de cette corde APB, laquelle perpendiculaire GM soit rencontrée en G par une autre QG perpendiculaire aussi à cette courbe en l'autre extrêmité Q de son élement ou de sa partie infiniment petite PQ : la perpendicularité de ces deux droites GP, GQ, à la courbe APB en deux points P, Q, infiniment proches l'un de l'autre, leur faisant faire avec cette courbe des angles droits GPD, GQP, & consequemment égaux entr'eux d'un même côté, si l'on prend encore g pour la force dont ce petit côté PQ du present polygone infinitilatere APB, est tiré suivant sa longueur par l'action de tout ce qu'il y a ici de puissances qui donnent cette forme à cette corde ; la démonstration précedente donnera ici la puissance $M = \frac{g \times PQ}{GP}$; & ainsi de toutes les autres puissances, dans lesquelles valeurs le Corol. 1. du Th. 11. faisant voir que la force g sera par tout la même : de sorte que la longueur des élemens P, Q, ne faisant rien à cette force g, si on les prend aussi par tout les mêmes, c'est-à-dire, tous égaux entreeux ou constans, & que le produit $g \times PQ$ ainsi rendu constant, y soit pris pour l'unité, l'on y aura ces puissances $M = \frac{1}{GP}$, &c. c'est-à-dire, que les puissances M, &c. seront alors par tout entr'elles en raison reciproque de leurs GP, &c. appellez vulgairement *rayons osculateurs*

de la courbe quelconque APB aux points P, &c. où ces puissances lui sont appliquées suivant ces directions perpendiculaires à sa courbure.

COROLLAIRE III.

Soient présentement deux cordes APB, ERF, courbées encore à volonté par l'action d'une infinité de puissances qui agissent toutes perpendiculairement sur elles en tous leurs points, de maniere que pour peu qu'on augmentât les appliques M, T, en P, R, suivant les rayons osculateurs GP, HR, de ces courbes, elles casseroient ces cordes en ces points ou élemens PQ, RS, dont les plus grandes forces ou résistances possibles soient g, h, avec lesquelles ces puissances M, T, soient en équilibre, & comme à la veille de les surmonter. En ce cas le précedent Fig. 100. 101.

Corol. 2. donnera $M = \frac{g \times PQ}{GP}$, $T = \frac{h \times RS}{HR}$: de sorte que l'on aura ici $\frac{g \times PQ \times T}{GP} = \frac{h \times RS \times M}{HR}$, d'où resulte $g . h :: \frac{RS \times M}{HR} . \frac{PQ \times T}{GP} :: \frac{GP \times M}{PQ} . \frac{HR \times T}{RS}$. c'est-à-dire, que les plus grandes forces ou résistances possibles g, h, des cordes APB, ERF, en P, R, seront ici en raison des fractions correspondantes $\frac{GP \times M}{PQ}$, $\frac{HR \times T}{RS}$, ou (en prenant PQ=RS dont la grandeur n'y fait qu'autant que les forces M, T, sont répandues le long de ces élemens, comme seroient celles de liqueurs qui les presseroient perpendiculairement dans toute leur longueur) comme les produits GP×M, HR×T. De sorte que s'il ne falloit ici que des puissances égales M, T, pour faire ainsi équilibre avec les plus grandes résistances possibles g, h, de ces cordes en P, R, ces plus grandes résistances ou forces g, h, en ces points, seroient alors comme les rayons osculateurs GP, HR, de ces courbes en ces mêmes points.

COROLLAIRE IV.

Si présentement on considere les courbes APB, ERF, comme des anneaux ou parties d'anneaux differens d'un tuyau, ou de tuyaux differens de bases quelconques, coupez horisontalement, & les puissances M, T, comme des efforts de liqueurs quelconques contenues dans ces tuyaux, lesquelles le pressent de dedans en dehors perpendiculairement en leurs élemens PQ, RS, avec des forces en équilibre avec les plus grandes résistances possibles g, h, des anneaux ou tuyaux à être rompus en ces endroits, de maniere que pour peu que ces efforts M, T, y augmentassent, ils y creveroient ces anneaux ou tuyaux; tout cela (dis-je) ainsi consideré, le Corol. 3. fait voir que les plus grandes résistances possibles g, h, de ces anneaux APB, ERF, y seroient entr'elles comme les fractions correspondantes $\frac{GP \times M}{PQ}$, $\frac{HR \times T}{RS}$, c'est-à-dire, $g.h :: \frac{GP \times M}{PQ} . \frac{HR \times T}{RS}$, Ainsi l'experience, & même le raisonnement seul faisant voir que les efforts des liqueurs contre quoi que ce soit, sont toûjours comme les produits de leurs pesanteurs specifiques par leurs hauteurs au dessus des bases ou surfaces qu'elles pressent, & par ces bases; & conséquemment que si l'on prend p, π, pour les pesanteurs specifiques des liqueurs contenues dans les tuyaux dont APB, ERF, sont les anneaux ou parties d'anneaux, & b, β, pour les hauteurs que ces liqueurs y doivent avoir au dessus de PQ, RS, pour y faire équilibre avec les plus grandes résistances possibles g, h, de ces anneaux ou tuyaux à être rompus en ces endroits, pour des hauteurs (dis-je) telles que pour peu qu'on les augmentât, ces liqueurs y creveroient ces tuyaux; l'on y aura $M = bp \times PQ$, & $T = \beta\varpi \times RS$, pour les efforts perpendiculaires M, T, sur les élemens PQ, RS, des anneaux APB, ERF, en équilibre avec les plus grandes résistances

g, h, que ces anneaux y puiſſent faire pour n'y point crever : la ſubſtitution de ces valeurs de M, T, dans l'Analogie précedente, la changera ici en $g. h :: GP\times bp. HR\times \beta\varpi$. c'eſt-à-dire, que les plus grandes forces ou réſiſtances poſſibles g, h, de ces anneaux APB, ERF, ou de leurs tuyaux, pour n'être point rompus en PQ, RS, par l'effort M, T, des liqueurs qui tendent perpendiculairement à les y crever, & qui les y creveroient en effet (*Hyp.*) pour peu qu'on les augmentât, ſeront ici entr'elles comme les produits $GP\times bp$, $HR\times\beta\varpi$, des rayons oſculateurs GP, HR, de ces anneaux APB, ERF, en ces endroits, multipliez par les hauteurs b, β, & par les peſanteurs ſpecifiques p, ϖ, des liqueurs qui les y preſſent perpendiculairement : de ſorte que,

1°. Si ces liqueurs ſont de mêmes peſanteurs ſpecifiées p, π, comme de l'eau qui ſeroit de la même dans les tuyaux dont les courbes APB, ERF, ſeroient des anneaux ou des parties d'anneaux ; l'on y aura $g. h :: GP\times b. HR\times\beta$. c'eſt-à-dire, que les plus grandes forces ou réſiſtances poſſibles g, h, de ces anneaux pour ne point crever en PQ, RS, y ſeroient comme les produits de leurs rayons oſculateurs GP, HR, en ces endroits, multipliez par les hauteurs b, β, des liqueurs qui les y preſſent perpendiculairement, & qui les y creveroient (*Hyp.*) pour peu que ces hauteurs de liqueurs au deſſus des endroits y fuſſent augmentez.

2°. Si de plus on veut que ces hauteurs b, β, ſoient égales entr'elles, c'eſt-à-dire, ſi l'on veut ici $b=\beta$ outre $p=\pi$; ces plus grandes forces ou réſiſtances g, h, des tuyaux, ou de leurs anneaux APB, ERF, pour ne point crever en PQ, RS, ſeront entr'elles comme les rayons oſculateurs GP, HR, de ces anneaux en ces endroits.

3°. Si l'on veut que ces tuyaux ſoient à l'ordinaire circulaires, & remplis d'eau, comme ſont les tuyaux de conduite des fontaines ; leurs plus grandes forces ou réſiſtances poſſibles g, h, pour ne point crever en PQ, RS, y ſeront comme les produits des hauteurs b, β, de l'eau dans

ces tuyaux au dessus de leurs anneaux APB, ERF, multipliées par les rayons de ces anneaux circulaires. De sorte que si les plus grandes hauteurs b, β, d'eau que ces plus grandes forces ou résistances possibles g, h, pussent soûtenir sans que les tuyaux crevassent PQ, RS, étoient égales; ces plus grandes forces ou résistances g, h, en cet endroit, y seroient en raison des rayons ou des diamétres des anneaux circulaires APB, ERF, de ces tuyaux.

On voit assez que les courbes APB, ERF, pouvant être également prises pour des anneaux en differens endroits d'un même tuyau, ou de differens tuyaux; tout le précedent Cor. 4. convient également aux differens anneaux d'un même ou de differens tuyaux, de quelque nature ou grandeur de bases qu'ils soient.

COROLLAIRE V.

On appelle tuyaux de forces ou de résistances g; h, par tout égales, lorsque les plus grandes hauteurs b, β, d'eau qu'ils puissent soûtenir sans crever, sont par tout égales entr'elles aux endroits PQ, RS, ou ils creveroient (*Hyp.*) pour peu qu'on augmentât ces hauteurs. Or le nomb. 2. du précedent Corol. 4. fait voir qu'en ce cas ces plus grandes forces ou résistances possibles g, h, de ces tuyaux, pour ne pas crever en aucun des endroits PQ, RS, sont entr'elles comme les rayons osculateurs GP, HR, en ces endroits de leurs sections horisontales APB, ERF. Donc des tuyaux sont de résistances égales par tout pour ne se point crever, lorsque leurs plus grandes forces ou résistances possibles g, h, y sont par tout en raison des rayons osculateurs de leurs sections horisontales aux endroits de ces plus grandes résistances. Or il est visible qu'en fait de tuyaux de même matiere les plus grandes forces ou résistances possibles à ne point crever, y sont comme la multiplicité de leurs fibres, c'est-à-dire, comme les épaisseurs de leurs anneaux de hauteurs égales. Donc pour que ces tuyaux de même matiere soient par tout & entr'eux de même force ou résistance à être crevez

par

par des liqueurs homogenes, il faut que leurs épaiſſeurs ſoient par tout en raiſon des rayons oſculateurs en ces endroits de leurs ſections horiſontales ; & conſequemment que leurs épaiſſeurs y ſoient comme leurs diamétres en ces endroits, lorſqu'ils ſont circulaires.

SCHOLIE.

On voit aſſez de quelle utilité les deux derniers Corollaires 4. 5. ſont pour juger de la force des tuyaux dans la conduite des eaux : ils pourroient me mener plus loin ſur cette matiere, à laquelle la liaiſon des conſequences m'a inſenſiblement conduit ; mais n'étant pas de mon ſujet, je ne m'arrêterai ici qu'à faire remarquer que le Corollaire 2. d'où ces deux-là me ſont venus par la médiation du Corollaire 3. pourroit encore ſe démontrer immédiatement ſans le ſecours du preſent Théoreme 13. qui l'a donné.

Car ſi outre l'élement ou petit côté PQ du polygone infinilatere APB de la Fig. 100. on y en conſidere encore un autre DP prolongé vers T en tangente DT ou PT de cette courbe, & que GP, GQ, perpendiculaires (*Hyp.*) à ces deux petits côtez PQ, DP, y rendent les angles GQP=GPD, & PGQ=QPT ; le point P ſe trouvant ici tiré par la puiſſance M contre les réſiſtances de ces deux petits côtez, comme avec trois cordons PM, PQ, PD, le Corol. 4. du Th. 1. fera voir que la puiſſance M y doit être à la réſiſtance *g* de petit côté ou cordon PQ, comme le ſinus de l'angle total DPQ au ſinus du partial GPD ; c'eſt-à-dire, en prenant encore ici ſ pour la marque des ſinus M. *g* : : ſDPQ. ſGPD : : ſQPT. ſGQP : : ſPGQ. ſGQP (*Lem. 8. Corol. 2.*) : : PQ. GP. Ce qui donne $M = \frac{g \times PQ}{GP}$, & le reſte comme dans le Corol. 2. Fig. 100.

SECTION III.

DES POULIES ET DES MOUFLES.

Soit que le centre de ces Poulies demeure fixe, ou qu'on le ſuppoſe mobile, & pour toutes les directions poſſibles des puiſſances ou des poids qui y ſeront appliquez.

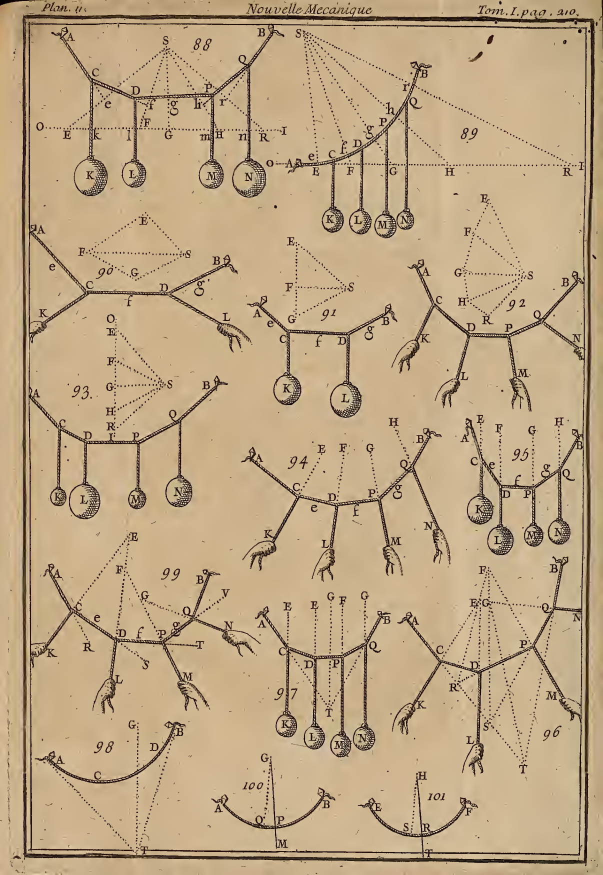
DEFINITION XVIII.

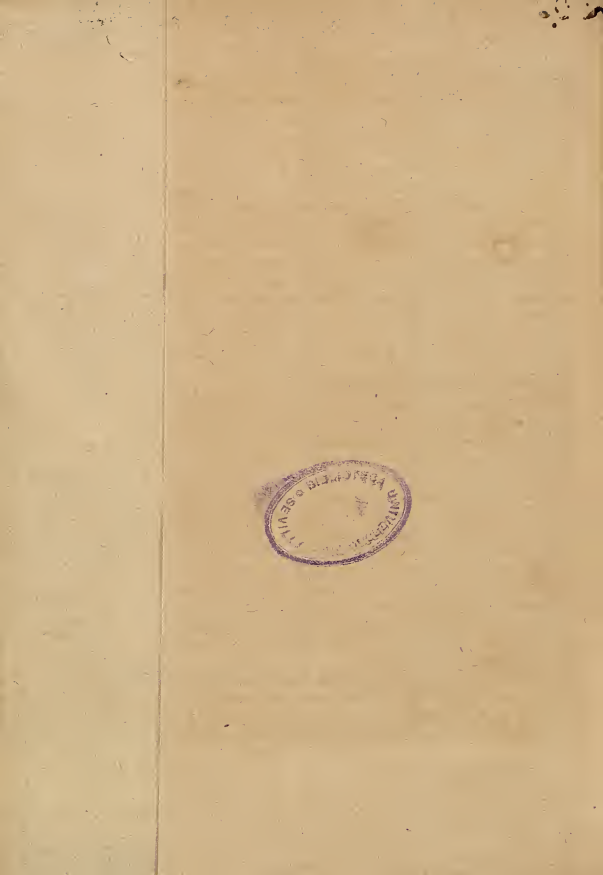
FIG. 102. 103. 104. 105. LA *Poulie* eſt une Machine compoſée d'une Roue MBNC, traverſée par ſon centre A d'un Eſſieu appellé *Goujon*, ou *Tourillon*, autour duquel elle eſt mobile par le moyen d'une corde PMBNR, appuyée ſur ſa circonference ou ſur ſon épaiſſeur : elle eſt preſque toûjours enchâſſée ou retenue par le moyen de ſon Eſſieu dans une fente ou replis d'une piece de bois ou de fer AB, appellée *Chappe* ou *Echarpe*, que cet Eſſieu (que nous regarderons à l'ordinaire comme une ligne) traverſe auſſi.

L'aſſemblage de pluſieurs Roues ou Poulies ainſi enchâſſées dans pluſieurs fentes ou replis d'une même piece de bois ou de fer, & mobiles (chacune ſur ſon centre) par une ſeule & même corde, qui, en paſſant de l'une à l'autre, s'appuye ſur toutes, s'appelle *Moufle*.

Soit qu'une même corde embraſſe une ou pluſieurs Poulies, ſes parties touchantes de chaque Poulie, ſeront dans la ſuite appellées ſimplement *touchantes* de cette Poulie, ou même *cordes touchantes* de cette Poulie, comme ſi elles étoient autant de cordes differentes ; & les points où ces Poulies ſeront touchées par ces parties de cordes, ſeront ſimplement appellez leurs *points d'attouchement*.

Ces Poulies ſeront enfin appellées *fixes* ou *mobiles*, ſelon que leurs centres ou goujons le ſeront. Les Moufles


88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101



seront aussi appellées *fixes* ou *mobiles*, selon qu'elles seront attachées à des points fixes, ou qu'elles pourront s'en approcher ou s'en éloigner.

DEFINITION XIX.

La droite MN menée par les points M, N, d'attouchement de la circonference du Cercle ou de la Poulie MBNC, & comprise entr'eux, s'appelle d'ordinaire *Corde* ou *Soutendante*, de chacun des arcs MBN, MCN; mais nous ne l'appellerons dans la suite que *Soutendante de l'arc MBN* embrassé par la corde PMBNR, pour distinguer cette droite MN de cette corde PMBNR, ou simplement *Soutendante*; sçavoir, celle qui passera par les points d'attouchement de la Poulie.

THEOREME XIV.

Fondamental de la presente Section. 3.

Soient trois puissances quelconques D, P, R, dont la premiere D soit appliquée au centre mobile A d'une Poulie MBNC suivant une direction quelconque AD, & les deux autres P, R, aux extrêmitez d'une corde PMBNR appuyée sur cette Poulie. FIG. 102. 103. 104. 105.

I. *S'il y a équilibre entre ces trois puissances D, P, R, ainsi appliquées, quelqu'angle MHN que fassent entr'elles les parties prolongées PM, RN, de cette corde, c'est-à-dire, les directions PM, RN, des deux puissances P, R; la direction AD de la troisiéme puissance D passera toûjours par le point H de leur concours à travers de leur angle MHN, & sera dans un même plan avec elles.*

II. *En ce cas d'équilibre cette puissance D sera toûjours à chacune des deux autres P, R, comme le sinus de cet angle MHR sera au sinus de sa moitié.*

III. *En ce même cas d'équilibre, si du centre A de la Poulie par les points M, N, où elle est touchée par les parties PM, RN, de la corde PMBRN, on mene les rayons AM, AN, avec la soutendante MN, le poids ou la puissance D sera aussi*

à chacune des puiſſances P, R, comme cette ſoutendante MN de l'arc MBN enveloppé par la corde PMBNR, eſt à chacun de ſes rayons AM, AN.

IV. *Reciproquement par rapport à la part. 2. ſi la direction AD de la puiſſance D paſſe par le concours H & à travers l'angle MHN des directions prolongées PM, RN, des puiſſances P, R, & que cette puiſſance D ſoit à chacune de ces deux-ci, comme le ſinus de l'angle MHN compris entre leurs directions prolongées, ſera au ſinus de ſa moitié; ces trois puiſſances en ce rapport, & ainſi appliquées, ſeront ici en équilibre entr'elles.*

V. *Reciproquement auſſi par rapport à la part. 3. ſi la direction de la puiſſance D paſſe encore dans le plan & par le concours H des directions prolongées PM, RN, des puiſſances P, R, & que cette puiſſance D ſoit preſentement à chacune de ces deux-ci comme la ſoutendante MN de l'arc MBN de la Poulie MBNC, embraſſé par la corde PMBNR, eſt à chacun des rayons AM, AN, de cette Poulie; ces trois puiſſances en ce rapport, & ainſi appliquées, ſeront encore ici en équilibre entr'elles.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Les trois puiſſances D, P, R, étant ici (*Hyp.*) en équilibre entr'elles, les Corol. 13. 14. du Lemme 3. font voir qu'en quelque point H que les directions prolongées PM, RN, de deux quelconques P, R, de ces trois puiſſances concourent entr'elles, la direction AD de la troiſiéme puiſſance D y doit auſſi concourir, & être dans un même plan avec elles. Donc en ce cas d'équilibre, quelqu'angle MHN que faſſent entr'elles les parties prolongées PM, RN, de la corde PMBNR, c'eſt-à-dire, les directions PM, RN, des puiſſances P, R, la direction AD de la troiſiéme puiſſance D paſſera toûjours par le point H de leur concours le long de leur plan, & à travers leur angle. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

PART. II. Sur une partie quelconque HG de la direction AD de la puiſſance D, priſe de H vers A dans les

Fig. 102. 104. & du côté opposé dans les Fig. 103. 105. soit le parallelogramme HEGF, dont les côtez HE, HF, soient sur les directions HP, HR, des puissances P, R. Cela fait, les nomb. 1. 2. 3. du Corol. 2. du Lem. 3. font voir que dans l'équilibre ici supposé entre les puissances D, P, R, la puissance D doit être égale à la force résultante (*Lem.* 3. *Corol.* 1. *nomb.* 1.) du concours des deux autres contr'elle, & être dirigée suivant la même ligne que cette force en sens contraire : de sorte que la puissance D étant ici (*Hyp.*) dirigée suivant AD, la force résultante du concours des deux autres puissances P, R, contre celle-là, y sera aussi dirigée suivant AD, ou suivant HG diagonale du parallelogramme EF. Par consequent cette force ou impression résultante du concours de ces deux puissances P, R, sera ici non seulement égale & directement opposée à la puissance D, mais encore elle sera (*Lem.* 3. *Corol.* 5.) à chacune des puissances P, R, comme la diagonale HG du parallelogramme EF est à chacun de ses côtez HE, HF, qui leur répondent sur leurs directions. Donc la puissance D sera de même ici à chacune des puissances P, R, comme cette diagonale HG à chacun de ces côtez HE, HF, du parallelogramme EF; c'est-à-dire (à cause de HF=GE) comme HG est à HE, GE. Or dans le triangle HEG ces trois côtez HG, HE, GE, sont (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) comme les sinus des angles HEG, HGE, EHG, qui leur sont opposez; c'est-à-dire (à cause de GE, HF, supposées paralleles entr'elles) comme les sinus des angles EHF, FHG, EHG, ou PHR, RHA, PHA. Donc la puissance D est pareillement ici à chacune des puissances P, R, comme le sinus de l'angle total PHR est à chacun des sinus des angles partiaux RHA, PHA. Mais PH, RH, étant ici tangentes en M, N, de la Poulie MBNC, & HA passant par son centre A, les angles RHA, PHA, y sont égaux entr'eux, & chacun la moitié du total PHR. Donc enfin la puissance D est ici à chacune des puissances P, R, en équilibre (*Hyp.*) avec elle, comme le sinus de l'angle

PHR que leurs directions font entr'elles, est au sinus de sa moitié. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

Cette démonstration fait voir que les trois puissances D, P, R, sont ici en équilibre sur la Poulie MDNC, & dans le même rapport entr'elles, que si elles n'étoient en équilibre (Th. 1. Corol. 4.) *qu'avec des cordes HD, HP, HR, nouées ensemble en H, & dirigées comme elles sont ici, c'est-à-dire, de maniere que les angles PHD fussent égaux entr'eux comme ils le sont ici; & qu'ainsi l'équilibre des puissances entr'elles sur des Poulies, peut fort bien passer pour un cas de l'équilibre avec des cordes seulement; & consequemment aussi le present Th. 14. pour un seul cas du Th. 1. ce qui fournit encore une autre démonstration que voici de la même part. 2. du present Th. 14.*

AUTREMENT. Il est visible que tant que la puissance D demeure ainsi en équilibre avec les puissances P, R, sur la Poulie MBNC, non seulement cette Poulie demeure sans mouvement, mais encore la corde PMBNR demeure dessus sans glisser, ni se mouvoir non plus que si elle y étoit collée, ou physiquement unie depuis M jusqu'à N avec la partie MBN de sa circonference; & les points M, N, de cette corde aussi fixes que si PM, RN, étoient deux cordes differentes qui y fussent separément attachées suivant les tangentes de la Poulie en ces deux points-là: de sorte qu'on peut regarder ici cette Poulie MBNC comme un corps qui tend vers D suivant AD d'une force égale à celle de la puissance D, & retenu avec les cordes PM, RN, par les puissances P, R, en équilibre avec lui. Or en ce cas non seulement sa ligne de direction AD passeroit (*Lem.* 3. *Corol.* 13. 14.) par le point H où concourent ces cordes prolongées, & le long de leur plan; mais encore cette Poulie MBNC regardée avec une telle impression, auroit (*Th.* 1. *Corol.* 4.) cette force à chacune des puissances P, R, qui la retiennent, comme le sinus de l'angle MHN à chacun des sinus des angles NHA, MHA. Donc en effet la ligne de direction AD de la force ou puissance D, avec laquelle la Poulie

MN eſt ainſi tirée contre les puiſſances P, R, en équilibre (*Hyp.*) avec elle, paſſe toûjours par le point H, dans lequel leurs cordes prolongées concourent, & le long de leur plan, ainſi qu'on le vient de démontrer dans la part. 1. mais encore en ce cas d'équilibre entre ces trois puiſſances D, P, R, la premiere D appliquée au centre A de la Poulie, eſt toûjours à chacune des deux autres P, R, comme le ſinus de l'angle MHN eſt à chacun des ſinus des angles NHA, MHA.

Or à cauſe que DA paſſe (*Hyp.*) par le centre A de la Poulie, & par H, & que MH, NH, en ſont deux touchantes en M, N; les deux angles NHA, MHA, ſont chacun la moitié de l'angle MHN. Donc en la preſente hypotheſe d'équilibre entre les trois puiſſances D, P, R, ſur la Poulie MBNC, la premiere D, dont la direction AD paſſe par le centre A de cette Poulie, eſt toûjours à chacune des deux autres P, R, comme le ſinus de l'angle MHN, ou PHR, que leurs directions ou cordes prolongées font entr'elles, eſt au ſinus de ſa moitié. *Ce qu'il falloit encore 2°. démontrer.*

PART. III. Puiſque (*Hyp.*) M, N, ſont les points où la Poulie eſt touchée par les parties PM, RN de la corde PMBNR, & que dans l'équilibre ici ſuppoſé entre les trois puiſſances D, P, R, ces parties de corde (directions des puiſſances P, R) prolongées concourent en H, ſur la direction AD, perpendiculaire à la ſoutendante MN; les angles AMH, ANH, ſeront droits de même que ceux que fait la droite MN avec AD; & par conſequent l'on aura ici non ſeulement l'angle MAN, complement de MHN à deux droits, mais encore tous les angles AMN, AHM, AHN, ANM, égaux entr'eux. Donc (*Déf. 9. Corol. 2.*) le ſinus de l'angle MAN ſera ici au ſinus de chacun des angles AMN, ANM, comme le ſinus de l'angle MHN y eſt au ſinus de chacune de ſes moitiez AHM, AHN. Or en ce cas d'équilibre la puiſſance D eſt (*part. 2.*) à chacune des deux autres puiſſances P, R, comme le ſinus de l'angle MHN eſt au ſinus de chacune de ſes moitiez

AHN, AHM. Donc en ce cas d'équilibre cette puissance D doit aussi être à chacune des deux autres P, R, comme le sinus de l'angle MAN est au sinus de chacun des angles ANM, AMN, du triangle isoscelle MAN, c'est-à-dire (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) comme la soutendante MN est à chacun des rayons AN, AM, de la Poulie MBNC. *Ce qu'il falloit* 3°. *démontrer.*

AUTREMENT. Puisque (*constr.*) les trois côtez AM, AN, MN, du triangle MAN, sont perpendiculaires aux trois directions PH, RH, AD, (chacun à chacune) des trois puissances P, R, D, en équilibre (*Hyp.*) entr'elles, & que ces trois puissances sont ici en équilibre comme sur un corps MBNC, auquel elles seroient appliquées en M, N, B; le Corol. 6. du Th. 1. fait voir que la puissance D y doit être à chacune des deux autres P, R, comme le côté MN du triangle MAN est à chacun de ses deux autres côtez AN, AM, c'est-à-dire, encore comme la soutendante MN de l'arc MBN de la Poulie, enveloppé de la corde PMBNR, qui soutient cette Poulie MBNC, est à chacun des rayons de cette même Poulie. *Ce qu'il falloit encore* 3°. *demontrer.*

PART. IV. Puisque (*Hyp.*) les trois puissances D, P, R, appliquées comme ci-dessus à la Poulie MBNC, le sont de maniere que la direction AD de la premiere D de ces puissances, passe par le concours H des directions PM, RN, prolongées des deux autres puissances P, R, le long de leur plan, & à travers leur angle MHN; que de plus cette premiere puissance D est à chacune des deux autres P, R, comme le sinus de l'angle MHN compris entre leurs directions ou cordes prolongées, est au sinus de sa moitié; & que (la direction AD passant par le centre A de la Poulie suivant son plan, & les deux autres PM, RN, la touchant en M, N,) chacun des angles MHA, NHA, est la moitié de l'angle MHN: ces trois puissances D, P, R, en action (*Hyp.*) les unes contre les autres sur la Poulie MBNC, seront ici entr'elles comme les sinus des angles MHN, NHA, MHA, que les directions ou cordes

cordes prolongées font entr'elles au point H, où elles concourent (*Hyp.*) toutes trois ensemble. Donc (*Th.* 1. *Corol.* 15.) ces trois puissances D, P, R, ainsi appliquées à la Poulie MBNC comme à un corps tiré de ces trois forces à la fois, doivent ici demeurer en équilibre entr'elles. *Ce qu'il falloit* 4°. *démontrer.*

AUTREMENT. Si quelqu'une de ces trois puissances D, P, R, par exemple, D, ne suffisoit pas pour faire ici équilibre avec les deux autres P, R, suivant les directions supposées, soit en sa place telle autre puissance B qu'on voudra, qui appliquée (comme elle) suivant AD, y suffise. La part. 2. fait voir que cette puissance B seroit alors à chacune des deux autres P, R, comme le sinus de l'angle MHN est au sinus de sa moitié, c'est-à-dire (*Hyp.*) comme la puissance D est à chacune de ces deux puissances P, R; & que par consequent cette puissance D seroit égale à l'autre B substituée en sa place. Donc ayant ici (*Hyp.*) la même direction AD qu'elle, cette puissance D feroit aussi (*ax.* 2.) équilibre avec les deux autres P, R.

Si l'on vouloit que ce fût une de ces deux-ci, par exemple, P, qui ne suffît pas pour leur faire faire équilibre avec la troisiéme D; l'on n'auroit qu'à supposer de même en la place de P suivant sa direction PM quelqu'autre puissance K, qui y suffît, & l'on trouveroit pareillement que cette nouvelle puissance K lui seroit égale; & consequemment que la puissance P, aussi-bien que K, feroit équilibre avec les deux autres R, D.

Donc les trois puissances D, P, R, appliquées comme on les suppose ici, à la Poulie MBNC, & entr'elles (*Hyp.*) comme les sinus de l'angle MHN & de ses moitiez, seroient ici en équilibre entr'elles. *Ce qu'il falloit encore* 4°. *démontrer.*

PART. V. Puisque (*Hyp.*) les directions prolongées DA, PM, RN, des puissances D, P, R, concourent ici toutes trois en H dans un même plan, & que (*Hyp.*) M, N, sont les points où la Poulie MBNC est touchée par les

parties PM, RN, de la corde PMBNR; l'on aura ici (comme dans la démonst. 1. de la part. 3.) le sinus de l'angle MHN au sinus de chacune de ses moitiez AHM, AHN, comme le sinus de l'angle MAN est au sinus de chacun des angles AMN, ANM, du triangle MAN, c'est-à-dire (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) comme la soutendante MN est à chacun des rayons AN, AM, de la Poulie MBNC; & consequemment aussi (*Hyp.*) comme la puissance D est à chacune des puissances R, P. Donc (*part.* 4.) ces trois puissances seront encore ici en équilibre entr'elles. *Ce qu'il falloit* 5°. *démontrer.*

AUTREMENT. Ces trois puissances D, P, R, étant ici (*Hyp.*) entr'elles comme les côtez MN, AM, AN, du triangle MAN, perpendiculaires (*Hyp.*) à leurs directions AD, PM, RN, & en action les unes contre les autres sur la Poulie MBNC comme sur un corps auquel elles seroient appliquées en B, M, N; le Corol. 19. du Th. 1. fait voir que ces trois puissances D, P, R, doivent encore ici demeurer en équilibre entr'elles. *Ce qu'il falloit encore* 5°. *démontrer.*

Cette part. 5. *se pourra encore démontrer (si l'on veut) par un raisonnement semblable à celui de la seconde démonstration de la part.* 4.

COROLLAIRE I.

La part. 2. faisant voir qu'en cas d'équilibre sur la Poulie MBNC entre les puissances D, P, R, la premiere D appliquée au centre A de la Poulie, est toûjours à chacune des deux autres P, R, appliquée à la corde PMBNR qui passe sur cette Poulie, comme le sinus de l'angle MHN compris entre les directions de ces deux puissances P, R, est au sinus de sa moitié, fait voir que la puissance D est toûjours alors en même raison à chacune de ces deux mêmes puissances P, R; & consequemment que ces deux-ci sont toûjours alors égales entr'elles.

Cela suit aussi de la part. 3. laquelle en ce cas d'équilibre donnant toûjours la puissance D à chacune des deux

autres P, R, comme la soutendante MN à chacun des rayons AM, AN, de la Poulie ABMC, donne aussi toûjours alors ces deux puissances P, R, entr'elles comme ces deux rayons ; & consequemment toûjours alors égales entr'elles.

COROLLAIRE II.

De ce qu'en cas d'équilibre sur la Poulie MBNC, la puissance D est toûjours (*part.* 2.) à chacune des puissances P, R, comme le sinus de l'angle MHN compris entre les directions de ces deux puissances-ci, est au sinus de sa moitié ; il suit (comme dans le Corol. 10. du Th. 1.) que lorsque ces directions PM, RN, sont paralleles entr'elles, & consequemment aussi (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) à la direction AD de la puissance D, le sinus de l'angle total MHN se trouvant alors (*Lem.* 7.) seul égal à la somme des sinus des deux angles partiaux MHA, NHA, moitiez de ce total MHN ; la puissance D doit pareillement être alors seule égale à la somme des deux autres P, R, & consequemment (*Corol.* 1.) être alors double de chacune d'elles, ou chacune d'elles être alors moitié de celle-là.

Celà suit aussi de la part. 3. suivant laquelle la puissance D en équilibre avec les puissances P, R, est toûjours à chacune d'elles comme la soutendante MN de l'arc enveloppé MBN de la Poulie est à chacun de ses rayons AM, AN. Puisque ce parallelisme entr'elles des directions PM, RN, de ces deux puissances P, R, confondant cette soutendante MN avec ces deux rayons AM, AN, alors bout à bout en ligne droite, & la rendant ainsi pour lors égale à leur somme, doit aussi rendre alors la puissance D égale à la somme des deux autres P, R ; & consequemment (*Corol.* 1.) être double de chacune d'elles.

COROLLAIRE III.

Pour en tout autre cas, c'est-à-dire, tant que les directions PM, RN, ne sont point paralleles entr'elles, ou

que prolongées elles font entr'elles quelqu'angle fini MHN, & conſequemment auſſi (*part.* 1.) les finis MHA, NHA, avec la direction AD de la puiſſance D; cette troiſiéme puiſſance D eſt toûjours moindre (*part.* 2.) que leur ſomme P+R, ou que le double (*Corol.* 1.) de chacune: puiſqu'alors le ſinus de l'angle total MHN eſt toûjours moindre (*Lem.* 8. *Corol.* 7.) que la ſomme des ſinus des angles partiaux MHA, NHA.

Cela ſuit auſſi de la part. 3. puiſqu'alors la ſoutendante MN de la Poulie MBNC eſt toûjours alors moindre que la ſomme AM+AN de ſes rayons AM, AN; & que cette part. 3. donne toûjours alors D. P+R :: MN. AM+AN.

COROLLAIRE IV.

En ce cas d'équilibre non ſeulement la puiſſance D eſt toûjours moindre (*Corol.* 3.) que la ſomme P+R des deux autres P, R, tant que leurs directions ou cordes ne ſont point paralleles entr'elles; mais encore (*Corol.* 1. *d'ici*, & *Lem.* 8. *Cor.* 6.) d'autant moindre (quoiqu'en raiſon differente) que l'angle MHN de ces directions ou cordes prolongées eſt plus obtus.

La part. 3. fait voir la même choſe en ce que plus cet angle MHN eſt obtus, plus ſon complement MAN (à deux droits) eſt aigu; & conſequemment plus auſſi la ſoutendante MN eſt moindre que la ſomme AM+AN des rayons AM, AN, de la Poulie MBNC: de ſorte que cette partie 3. donnant toûjours ici D. P+R :: MN. AM+AN. elle y donnera toûjours auſſi D d'autant moindre, que P+R (quoiqu'en raiſon differente) que l'angle MHN y ſera plus obtus.

COROLLAIRE V.

Donc cet angle MHN pouvant s'ouvrir ou augmenter de plus en plus à l'infini, juſqu'à ce que les directions ou cordes PM, RN, des puiſſances P, R, ſe trouvent en ligne droite; ces deux mêmes puiſſances P, R, peuvent faire enſemble équilibre avec une infinité d'autres ap-

pliquées une à une en la place de la troisiéme puissance D suivant sa direction AD, plus petites, & plus petites à l'infini, selon que cet angle MHN s'ouvrira de plus en plus.

COROLLAIRE VI.

De-là & du Corol. 2. on voit que la puissance D peut diminuer à l'infini, & cependant faire toûjours équilibre avec les mêmes puissances P, R, à mesure que l'angle MHN compris entre leurs directions ou cordes prolongées PM, RN, deviendra plus grand; mais qu'en ce cas d'équilibre cette puissance D ne peut jamais être plus grande (*Corol.* 1. *d'ici & Lem.* 8. *Corol.* 6.) que la somme P+R de ces deux-là; cette puissance D sera égale à cette somme P+R (*Corol.* 2.) lorsque les directions PM, RN, des puissances P, R, se trouveront paralleles entr'elles; & depuis cette égalité cette puissance D diminuera à l'infini (*Corol.* 5.) à mesure que l'angle MHN augmentera, jusqu'à devenir même nulle ou zero, lorsque cet angle se trouvera infiniment obtus, c'est-à-dire (*Déf.* 11.) lorsque les directions PM, RN, des puissances P, R, supposées toûjours les mêmes, se trouveront en ligne droite.

COROLLAIRE VII.

Donc en tous ces cas d'équilibre differens à l'infini, les puissances P, R, étant toûjours (*Corol.* 1.) égales entre-elles, & consequemment leur somme double de chacune d'elles; il n'y en a qu'un seul où la puissance D puisse être double de chacune de ces deux-là, sçavoir (*Cor.* 2.) celui où les directions PM, RN, de ces deux puissances égales P, R, sont paralleles entr'elles; & dans tous les autres (*Corol.* 3.) cette puissance D sera toûjours plus petite que le double de chacune de ces deux-là, & d'autant plus petite (*Corol.* 4. que l'angle MHN sera plus ouvert ou plus obtus.

COROLLAIRE VIII.

Presentement si au lieu de la puissance ou du poids D en équilibre avec les puissances P, R, on attachoit la corde AD à quelque clou, il est visible que ce clou feroit la même résistance contre les puissances P, R, que fait presentement le poids ou la puissance D; que la direction de la corde AD seroit encore ici la même qu'auparavant, & que la résistance du clou y seroit égale à celle du poids ou de la puissance D. D'où il suit,

1°. Que lorsqu'une Poulie sur laquelle deux puissances font équilibre comme ici P, R, est suspendue ou retenue par une corde telle qu'est ici AD, cette corde se dirige toûjours en sorte (*part.* 1.) qu'elle divise en deux également l'angle MHN des tangentes de cette Poulie touchée aux points M, N, par les directions ou cordes PM, RN, de ces deux puissances.

2°. La résistance ou la charge du clou auquel est attachée la corde AD qui soûtient cette Poulie MBNC contre l'action des puissances P, R, est à chacune d'elles (*part.* 2.) comme le sinus de l'angle MHN de leurs directions ou cordes prolongées PM, RN, est au sinus de sa moitié; & aussi (*part.* 3.) comme la soutendante MN de l'arc MBN enveloppé de la corde PMBNR, est au rayon AM, AN de la Poulie MBNC.

3°. Par consequent tant que l'angle MHN seroit fini, la charge ou la résistance de ce clou auquel la corde AD seroit attachée, seroit (*Corol.* 3.) moindre que la somme des puissances P, R, & moindre de plus en plus (*Corol.* 4.) que cette somme P+R, à mesure que cet angle MHN deviendroit plus grand: mais si les directions ou cordes PM, RN, de ces deux puissances, lesquelles prolongées font cet angle, se trouvent paralleles entre-elles, la charge ou la résistance de ce même clou sera égale (*Corol.* 2.) à la somme de ces deux puissances P, R; & consequemment alors (*Corol.* 1.) double de chacune d'elles.

COROLLAIRE IX.

Si la Poulie MBNC au lieu d'être arrêtée en D, ou en quelqu'autre point de la corde AD, qui passe par son centre A, avoit seulement ce centre A fixe autour duquel elle fût mobile, les puissances P, R, agissant encore sur cette Poulie de la même maniere qu'auparavant, & cette Poulie leur faisant aussi encore la même résistance qu'elle leur faisoit, lorsqu'elle étoit retenue par la corde AD; elle doit en recevoir encore la même impression, & suivant la même direction AD qu'auparavant; ainsi l'effort commun des puissances P, R, sur cette Poulie MBNC, ne tend encore qu'à la mouvoir suivant DA avec la même force commune dont elles tiroient auparavant contre le poids ou la puissance D, ou contre le clou qu'on vient de supposer (*Cor.* 8.) en la place de ce poids ou de cette puissance D. Donc la charge de cette Poulie MBNC, lorsque le centre A en est fixe, ou la résistance de son goujon fixe A, autour duquel seulement elle est mobile, est toûjours (*part.* 2.) à chacune des puissances P, R, (en équilibre sur cette Poulie, & au concours d'action desquelles son goujon fixe A résiste) comme le sinus de l'angle MHN compris entre leurs directions ou cordes prolongées PM, RN, est au sinus de sa moitié, ou (*part.* 3.) comme la soutendante MN est au rayon AM ou AN de cette Poulie MBNC; & consequemment aussi (*Corol.* 3.) cette charge ou résistance de ce goujon fixe A, est toûjours moindre que la somme de ces deux puissances P, R, excepté dans le cas de leurs directions paralleles entr'elles, dans lequel cette charge de la Poulie MBNC est toûjours (*Corol.* 2.) égale à la somme de ces deux puissances P, R, & consequemment (*Corol.* 1.) double de chacune d'elles.

COROLLAIRE X.

De-là & du Corol. 5. il suit que plus l'angle MHN compris entre les parties de la corde PM, RN, prolon-

gées du côté de H, sera grand, moins sera grande la charge de la Poulie MBNC, ou de son centre A, soit que ce centre en soit fixe, ou qu'il soit mobile : de sorte que cet angle MHN peut devenir si obtus que la Poulie MBNC ou son centre A ne sera chargé que si peu qu'on voudra des puissances P, R ; jusques-là même que cette Poulie pourroit être soûtenue contre ces deux puissances par une troisiéme D indéfiniment petite, c'est-à-dire, moindre que quelque poids donné que ce soit : il ne faut pour cela (*Corol.* 4.) qu'ouvrir l'angle MHN compris entre les directions des parties de corde PM, RN, jusqu'à ce qu'enfin son sinus soit à celui de sa moitié, ou la soutendante MN au rayon AM de la Poulie, en moindre raison que le poids donné n'est à chacune des puissances P, R.

COROLLAIRE XI.

Au contraire on peut rendre cet angle MHN si aigu que la puissance ou le poids D appliqué au centre A de la Poulie MBNC, ou quelqu'autre en sa place, devra être plus grand que chacune des puissances P, R, pour faire équilibre avec elles. Mais ce poids ne peut pas ainsi augmenter à l'infini ; car ne pouvant jamais (*Corol.* 6.) être plus grand que lorsque cet angle MHN ou PHR est infiniment aigu, c'est-à-dire (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) lorsque les parties PM, RN, de corde sont paralleles entre-elles ; & le sinus de cet angle MHN, n'étant encore alors (*Corol.* 4.) que double du sinus de sa moitié, & la soutendante MN seulement double alors du rayon AM de la Poulie, ce poids ne peut être tout au plus (*Corol.* 1.) que double de chacune des puissances P, R.

COROLLAIRE XII.

Ce qui fait encore voir, comme dans le Corol. 7. que sur une infinité de cas differens où cet équilibre peut arriver, il n'y en a qu'un seul dans lequel le poids ou la puissance D puisse (*Corol.* 11.) être double de chacune des

des puissances P, R ; & que dans tous les autres il est toûjours (*Corol.* 10.) moindre que double, & moindre à l'infini que chacune d'elles.

Tous ceux qui se mêlent de Mécanique, sçavent assez que jusqu'au Projet de celle-ci, donné en 1687. *dans lequel ceci fut ainsi démontré, on regardoit ordinairement comme generale, & comme absolument vraye cette proposition :* Qu'un poids attaché ou suspendu au centre mobile d'une Poulie, & en équilibre avec une puissance appliquée à une des extrêmitez d'une corde, laquelle embrassant cette Poulie, auroit son autre extrêmité retenue par quelque clou, ou autrement, seroit double de cette puissance. *Cependant on voit par ce dernier Corol.* 12. *& par le Corol.* 7. *que sur une infinité de cas differens où cet équilibre peut arriver, cette proposition n'est vraye que dans un seul, qui est lorsque les parties de la corde, qui touchent cette Poulie, sont paralleles entr'elles, & qu'elle est fausse dans tous les autres. Il est vrai que dans la démonstration qu'en donnent les Auteurs qui l'ont avancée, ils supposent tous que ces parties de corde touchent cette Poulie aux extrêmitez d'un même diamétre ; & consequemment qu'elles sont paralleles entr'elles ; mais outre qu'il est rare qu'elles le soient, ces Auteurs n'ayant point fait cette restriction dans leur proposition, ils la regardent dans la suite comme generale, & l'appliquent indifferemment à toutes les machines où l'on se sert de Poulies, sans avoir égard à la situation de leurs cordes, que plusieurs même dirigent indifferemment, sans rien changer au rapport résultant du seul parallelisme de ces directions dans cette proposition, entre les poids & la puissance qu'ils y supposent en équilibre entr'eux, comme si cette varieté des directions n'en devoit apporter aucune dans ce rapport : ce qui a jetté ces Auteurs dans des méprises considerables, comme on le verra par le Corol.* 17. *de ce Théoreme-ci, & par les Corol.* 1. 2. 3. *des Th.* 17. 18. *dans les réflexions qui suivront ce Corol.* 17. *du present Th.* 14. *& le Scholie du Th.* 18.

M. Wallis est le seul que je sçache avoir reconnu cet inconvenient avant 1687. *que j'en avertis dans le Projet de*

cette Mécanique-ci, sans sçavoir, ou sans me souvenir alors qu'il l'eût effectivement reconnu. Je l'apperçois tout presentement dans les Scholies des propositions 2. 3. du chap. 8. de la part. 3. de sa Mécanique; mais il n'y remedie pas : il se contente de dire dans le premier de ces deux Scholies, que l'on y pourra remedier par ce qu'il a dit de l'obliquité des mouvemens dans le chap. 2. & puis dans l'autre Scholie il traite cet inconvenient de leger, quoiqu'il n'y ait rien de leger pour un Géometre, sur tout pour un aussi grand Géometre qu'il l'étoit, & que cet inconvenient puisse même aller jusqu'à faire prendre un poids pour double d'une puissance par rapport à laquelle il feroit si petit qu'on voudroit, & cependant toûjours en équilibre avec elle, ainsi qu'on le vient de voir dans les Cor. 7. 12.

Au reste cette remarque, à laquelle nous a engagé la justice dûe à M. Wallis, pour avoir le premier (que je sçache) apperçû cette difficulté, ne doit faire penser autre chose de lui, par rapport à elle; sinon que la facilité qu'il croyoit à résoudre le lui a fait negliger, quoiqu'il en soit de cette facilité à resoudre cette difficulté par le principe de M. Wallis, ceux pour qui ceci est écrit, seront peut-être bien aises de la voir (comme ici) résolue par le nôtre.

COROLLAIRE XIII.

Il suit des part. 2. 4. de ce Théoreme-ci, que si les parties de corde PM, RN, des puissances P, R, lorsqu'elles soûtiennent la puissance D, ne sont pas paralleles entr'elles, ces deux mêmes puissances P, R, pourront soûtenir la même troisiéme D par le moyen d'une même Poulie MBNC, dans deux situations differentes de leurs cordes PM, RN, parce que ces deux cordons prolongez peuvent faire des angles égaux en H de part & d'autre de la Poulie MBNC, ou de son centre A, entr'elles & avec la direction AD de ce centre, ou de cette Poulie, soit en s'écartant l'une de l'autre, comme dans les Fig. 102. 104. soit en s'approchant, comme dans les Fig. 103. 105. par consequent (*part.* 2. 4.) les mêmes puis-

ſances P, R, qui dans l'une de ces deux ſituations de leurs parties de corde, ſont capables de ſoûtenir la puiſſance ou le poids D, le pourront encore ſoûtenir dans l'autre.

La même choſe ſuit auſſi des part. 3. 5. parce qu'en ce cas des directions PM, RN, non paralleles entr'elles, des puiſſances P, R, ces directions peuvent en deux ſituations differentes toucher la même Poulie MBNC aux extrêmitez de deux ſoutendantes MN égales entr'elles, l'une au deſſus du centre A, comme dans les Fig. 102. 105. & l'autre au deſſus, comme dans les Fig. 103. 104. les deux puiſſances P, R, qui ſoûtiendroient la troiſiéme D dans une de ces deux ſituations de leurs cordons PM, RN, la ſoûtiendroient auſſi (*part.* 3. 5.) dans l'autre.

COROLLAIRE XIV.

Mais ſi les directions ou cordons PM, RN, des puiſſances P, R, en équilibre (*Hyp.*) avec la puiſſance D, ſont paralleles entr'elles; ces deux puiſſances P, R, ne pourront (*part.* 2. 3.) ſoûtenir la troiſiéme D qu'en cette ſeule ſituation de leurs cordons ou parties de corde; parce qu'il n'eſt pas poſſible (*Corol.* 7.) de donner à ces cordons d'autre ſituation, dans laquelle la puiſſance ou le poids D ſoit double de chacune des puiſſances P, R, comme il l'eſt (*Corol.* 2.) dans celle-ci.

COROLLAIRE XV. Fig. 106.

Il ſuit encore de la part. 2. de ce Théoreme-ci que le poids D en équilibre avec la puiſſance R par le moyen de pluſieurs Poulies mobiles, dont A, B, C, &c. ſont les centres ſeparez & appliquez comme on les voit dans la Fig. 106. Il ſuit, dis-je, encore de la part. 2. du preſent Th. 14. que ce poids D ainſi en équilibre avec la puiſſance R, eſt toûjours à cette puiſſance comme le produit des ſinus des angles totaux MHN, PKQ, XLY, &c. que font (lorſqu'on les prolonge) les parties dont les

cordes EK, FO, GR, &c. touchent toutes ces Poulies, est au produit des sinus des moitiez de chacun de ces angles. Car (*part.* 2.) la résistance de la Poulie A ou du poids D, est à la résistance de la Poulie B, comme le sinus de l'angle MHN est au sinus de sa moitié; de même (*part.* 2.) la résistance de la Poulie B est à celle de la Poulie C, comme le sinus de l'angle PKQ est au sinus de sa moitié; de même encore (*part.* 2.) la résistance de la Poulie C est à celle de la puissance R, comme le sinus de l'angle XLY est au sinus de sa moitié; & toûjours de même, quelque nombre de Poulies mobiles qu'on suppose ici avant que d'arriver à la puissance R. Donc, en multipliant par ordre les termes de toutes ces analogies, l'on aura ici le poids D à la puissance R, comme le produit des sinus des angles totaux MHN, PKQ, XLY, &c. ou EHK, FKC, GLR, &c. est au produit des sinus des moitiez de ces angles.

COROLLAIRE XVI.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans le précedent Corol. 15. si l'on ajoûte aux Poulies mobiles les soutendantes & les rayons qu'on leur voit ici par les points où elles sont touchées par les cordes qui les soûtiennent, ainsi que dans la part. 3. la résistance de la Poulie A; ou du poids D, sera ici (*part.* 3.) à la résistance de la Poulie B : : MN. AM. De même (*part.* 3.) la résistance de la Poulie B sera ici à celle de la Poulie C : : PQ. BP. De même encore (*part.* 3.) la résistance de la Poulie C sera à celle de la puissance R : : XY. CX. Et toûjours de même, quelque nombre de Poulies mobiles qu'on suppose ici depuis le poids D jusqu'à la puissance R. Donc, en multipliant par ordre les termes de toutes ces Analogies, l'on aura ici D. R : : MN×PQ×XY. AM×BP×CX. C'est-à-dire, que le poids D sera toûjours ici à la puissance R, comme le produit des soutendantes des arcs des Poulies, embrassez par les cordes qui les soûtiennent sera au produit de leurs rayons.

COROLLAIRE XVII.

Si presentement on suppose que les cordons qui touchent ces Poulies, sont tous deux à deux paralleles entr'eux sur chacune d'elles, cette hypothese rendant (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) les angles MHN, PKQ, XLY, &c. infiniment aigus, leurs sinus seront alors (*Lem.* 7.) doubles de ceux de leurs moitiez; ou (ce qui revient au même) les soutendantes MN, PQ, XY, &c. des arcs enveloppez par les cordes qui les soûtiennent, passant alors toutes par les centres A, B, C, &c. de ces arcs ou des Poulies, seront aussi pour lors chacune double du rayon de chaque Poulie, dont cette soutendante est alors le diamétre. Ainsi ayant en general le poids D à la puissance R (*Corollaire* 15.) comme le produit des sinus des angles totaux MHN, PKQ, XLY, &c. au produit des sinus des moitiez de chacun de ces angles, ou (*Corollaire* 16.) comme le produit des soutendantes MN, PQ, XY, &c. au produit des rayons des Poulies: l'on aura ici D. R :: $1 \times 1 \times 1 \times$ &c. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times$ &c :: $2 \times 2 \times 2 \times$ &c. 1. c'est-à-dire, le poids D à la puissance R, comme le degré de 2, qui auroit pour exposant le nombre des Poulies, seroit à l'unité: de sorte qu'en prenant n pour ce nombre quelconque des Poulies, ce cas de parallelisme supposé dans toutes entre les cordons touchans de chacune donneroit en general D. R :: 2^n. 1. Ce qui signifie qu'alors le poids D seroit à la puissance R, comme le plus grand terme d'une progression Géométrique double, qui en auroit autant qu'il y a de Poulies, plus un, seroit au premier. D'où l'on voit que $n = 3$ dans le cas de la presente Fig. 106. de trois Poulies, donneroit D. R :: 2^3. 1 :: 8. 1. s'il y en avoit quatre, alors $n = 4$ donneroit D. R :: 2^4. 1 :: 16. 1. s'il y en avoit cinq, alors $n = 5$ donneroit D. R :: 2^5. 1 :: 32. 1. & ainsi de tel autre nombre n qu'on voudra de Poulies.

COROLLAIRE XVIII.

Ce cas (*Corol.* 17.) de parallelisme deux à deux de tous les cordons touchans des Poulies employées, comme dans la presente Fig. 106. est le seul sur une infinité, dans lequel le poids D en équilibre avec une puissance R, puisse être à cette puissance comme le plus grand terme d'une progression Géométrique double, qui en auroit autant qu'il y a de Poulies, plus un, seroit au premier. Car dans tous les autres cas de cordons touchant les Poulies sans être paralleles deux à deux sur chacune, ce poids D doit toûjours être à cette puissance R en équilibre (*Hyp.*) avec lui, en moindre raison (*Corol.* 3.) que ce dernier terme au premier de cette progression double, & même (*Corol.* 4.) en moindre à l'infini ; parce que les angles MHN, PKQ, XLY, &c. ne pouvant devenir plus aigus (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) que lorsque ces parties de cordes, tangentes des Poulies, sont deux à deux (sur chaque Poulie) paralleles entr'elles, les raisons de leurs sinus aux sinus de leurs moitiez, ne peuvent jamais être plus grandes (*Corol.* 7.) que celle de 2 à 1. Pareillement les soutendantes MN, PQ, XY, &c. alors diamétres de leurs Poulies, ne pouvant jamais être plus grandes qu'en cet état ; le rapport de chacune au rayon de sa Poulie, ne peut être non plus jamais plus grand que de 2 à 1. Au contraire les angles MHN, PKQ, XLY, &c. pouvant devenir toûjours plus grands ou plus obtus à l'infini, les rapports de leurs sinus aux sinus de leurs moitiez, peuvent (*Lem.* 8. *Corol.* 6.) diminuer à l'infini ; ou (ce qui revient au même) les soutendantes MN, QP, YX, &c. devant diminuer à mesure que ces angles augmentent ou deviennent plus obtus ; le rapport de chacune d'elles au rayon de sa Poulie, peut aussi par ce moyen diminuer à l'infini.

De-là on voit assez la méprise de ceux qui dans cet usage des Poulies, ont avancé comme proposition generale, que le poids D est la puissance R, comme le plus grand terme

d'une progreſſion double, qui en auroit autant qu'il y a de Poulies, plus un, eſt au moindre. *Ce qui les a trompez, c'eſt l'uſage trop étendu qu'ils ont donné à la propoſition rapportée dans la réflexion qui ſuit le Corol. 12. de ce Théoreme-ci.*

COROLLAIRE XIX.

Le précedent Corol. 17. fait déja voir, & on le verra encore dans la ſuite, que les Poulies mobiles peuvent conſiderablement épargner les forces qu'il faudroit employer pour ſoûtenir immédiatement, & ſans aucune machine le poids qu'on ſoûtient avec elles; puiſque ſuivant ce Corol. 17. dans le cas du parallelisme des cordons touchans de chacune des trois Poulies de la Fig. 106. il ne faut pour ſoûtenir le poids D par leur moyen, qu'une force égale à la huitiéme partie de ſa peſanteur, au lieu qu'il la faudroit (*Ax.* 4.) égale à cette peſanteur entiere pour ſoûtenir ce poids immédiatement & ſans le ſecours d'aucune machine. Si on le vouloit ſoûtenir de même avec quatre Poulies ainſi mobiles, ce Corol. 17. fait pareillement voir que dans ce cas de paralleliſme des cordons touchans chacune de toutes ces Poulies, il ne faudroit qu'une puiſſance égale à la ſeiziéme partie de la peſanteur de ce poids; qu'avec cinq Poulies il ne faudroit qu'une puiſſance égale à la trente-deuxiéme partie de ſa peſanteur; & toûjours moindre à l'infini, que ce poids ſuivant la progreſſion marquée dans ce Corol. 17. à meſure qu'on augmentera le nombre des Poulies: de ſorte que ſi *m* étoit un terme d'une telle progreſſion double ∺ 1. 2. 4. 8. 16. . . . . . , *m*. &c. lequel fût précedé d'autant d'autres qu'il y auroit ici de Poulies toutes touchées par des cordons paralleles entr'eux deux à deux pour chacune; le poids D ſeroit alors à la puiſſance R :: *m*. 1.

Ce cas de paralleliſme des cordons touchans de chaque Poulie mobile, eſt bien celui où la puiſſance eſt (*Corol.* 6.) la plus petite de celles qui, à l'aide de ces Poulies,

peuvent faire équilibre avec ce poids ; mais il n'eſt pas le ſeul où ce poids puiſſe ainſi être ſoûtenu par une puiſ-
FIG. 107. ſance moindre que lui. On le verra, ſi l'on imagine la
108. puiſſance R en équilibre avec le poids D ſuſpendu au centre A, ou plûtôt à la chape AB d'une Poulie mobile MBNC ſoûtenuë ſur une corde PMBNR, dont une extrêmité ſoit attachée à un clou ou crochet P, & l'autre retenuë par la puiſſance R : on verra, dis-je, ſuivant les part. 2. 3. du preſent Th. 14. & ſuivant le Corol. 6. du Lem 8. que depuis la ſituation où les cordons PM, NR, prolongez font entr'eux un angle PHR de 120 degrez, juſqu'à ce qu'ils ſoient devenus paralleles entr'eux, la puiſſance R ſera toûjours moindre que le poids D en équilibre (*Hyp.*) avec elle, & d'autant moindre (quoiqu'en raiſon differente) que cet angle ſe trouvera plus aigu. Car le ſinus de 120 degrez étant le même (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) que celui de ſa moitié 60 degrez, qui en eſt le complement à 180 degrez, ou (ce qui revient au même) la ſoutendante MN étant alors égale au rayon AM ou AN de la Poulie MBNC ; les part. 2. 3. font voir que lorſque l'angle PHR ſera de 120 degrez, la puiſſance R ſera préciſément égale au poids D : & parce que plus cet angle diminuera, plus au contraire (*Lem.* 8. *Corol.* 6.) augmentera le rapport de ſon ſinus à celui de ſa moitié, auſſi-bien que le rapport de la ſoutendante MN au rayon AM ou AN de la Poulie ; & conſequemment plus diminuera pour lors le rapport du ſinus de la moitié de cet angle PHR au ſien, ou du rayon AM de la Poulie à la ſoutendante MN, plus auſſi (*part.* 2. 3.) diminuera pour lors la puiſſance R par rapport au poids D toûjours le même & toûjours (*Hyp.*) en équilibre avec elle, juſqu'à ce qu'enfin elle n'en ſoit plus que la moitié (*Corol.* 2.) lorſque les cordons PM, RN, feront devenus paralleles entr'eux : ce que le rapport, ſur tout du rayon AM ou AN de la Poulie à la ſoutendante MN de ſon arc MBN, enveloppé de la corde PMBNR, fait voir ſenſiblement.

La

La même chose seroit encore sensiblement en imaginant un parallelogramme HEGF, dont la diagonale HG soit une partie quelconque de la direction DA du poids D prolongée depuis H vers G, & dont les côtez HE, HF, soient sur les directions PH, HR. Car alors on verra que puisque le poids D doit toûjours être ici (*part.* 2.) à la puissance R, comme le sinus de l'angle PHR, ou EHF, au sinus de sa moitié EHG ou HGF, tant qu'il sera en équilibre avec elle; & consequemment aussi pour lors (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) comme le sinus de son complement HFG est au sinus de HGF, c'est-à-dire (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) comme HG est à HF: on verra, dis-je, alors que le cas de l'angle PHR ou EHF de 120 degrez rendant le triangle HFG équilateral, & consequemment alors HF=HG; la puissance R en ce cas doit être égale au poids D. On verra de plus que le rapport de HF à HG diminuant toûjours (*Lem.* 8. *Corol.* 2. *&* 6.) à mesure que l'angle PHR devient plus aigu, jusqu'à devenir (*Lem.* 7. *&* 8. *Corol.* 2.) HF+FG=HR, & consequemment HF=$\frac{1}{2}$HG lorsque l'angle PHR se trouve infiniment aigu, c'est-à-dire (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) lorsque les directions PM, RN, sont paralleles entr'elles; la puissance R toûjours en équilibre (*Hyp.*) avec le poids D, doit toûjours diminuer avec cet angle PHR, depuis l'égalité qu'on lui vient de voir avoir avec ce poids, lorsque cet angle étoit de 120 degrez, jusqu'à n'en valoir plus que la moitié (*Corol.* 2.) lorsque cet angle est devenu infiniment aigu par l'arrivée (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) des cordons PM, RN, à être paralleles entr'eux.

Voilà quelle est l'utilité des Poulies mobiles pour l'épargne des forces dans la Statique: utilité d'autant plus grande que plus on y employera de ces sortes de Poulies à la fois, moins (Corol. 17.) *il faudra de force pour soûtenir, & consequemment aussi pour mouvoir les poids qu'il s'agira de retenir ou de transporter d'un lieu en un autre, on le verra encore davantage dans la suite.*

COROLLAIRE XX.

Quant aux Poulies des centres fixes, il ſuit du Corol. 1. qu'avec elles ſeules, de quelque maniere qu'on s'en ſerve, il n'y aura jamais rien à gagner du côté de la force qu'il y faut employer, c'eſt-à-dire, que de quelque maniere qu'on s'en ſerve, il y faudra toûjours employer autant de force pour ſoûtenir un poids par leur ſeul moyen, qu'il en faudroit pour le ſoûtenir immédiatement ſans elles, & ſans aucune autre machine. Par exemple, il faudra une même force R, quelque direction qu'on lui donne, pour ſoûtenir le poids D avec la corde RAD par le moyen de la Poulie fixe A, que pour le ſoûtenir immédiatement avec le ſeul cordon AD, c'eſt-à-dire, la même qu'une puiſſance en A, qui ſoûtiendroit effectivement ce poids avec le ſeul cordon AD; puiſqu'en ce cas d'équilibre de part & d'autre, l'on auroit (*Corol.* 1.) R=D, & auſſi (*Ax.* 4.) la puiſſance en A=D.

FIG. 109.

FIG. 110. De même quand on employeroit à la fois pluſieurs de ces Poulies fixes AB, EF, HK, &c. placées à volonté, on ne gagneroit encore rien du côté de la force R, qu'il faudroit employer pour ſoûtenir le poids D par le moyen de ces ſeules Poulies avec la corde DABEFHKR, appuyée ſur ou contr'elles; c'eſt-à-dire, que cette force R, quelque direction qu'elle eût, devroit encore être ici égale au poids D pour l'y ſoûtenir ainſi en équilibre, de même (*Ax.* 4.) que pour le ſoûtenir immédiatement ſans le ſecours d'aucune machine. Car en ce cas d'équilibre les deux forces dont chacune des parties BE, FH, &c. de la corde, eſt tirée directement en ſens contraires, étant (*Ax.* 4.) égales entr'elles, ſi l'on appelle M chacune des deux forces dont BE eſt tirée de B vers E, & de E vers B; N, chacune des deux dont FH eſt pareillement tirée de F vers H, & de H vers F: ce cas d'équilibre donnera (*Corol.* 1.) R=N=M=D, c'eſt-à-dire, la puiſſance R égale au poids D, de même (*Ax.* 4.) que ſi elle le ſoûte-

noit immédiatement & ſans le ſecours d'aucune machine.

Donc les Poulies fixes ou de centres fixes, de quelque maniere & en quelque nombre qu'on les employe, n'épargnent jamais aucune force. Elles ne laiſſent pourtant pas d'être très-utiles, non ſeulement en ce qu'elles ſervent (comme dans la Fig. 110.) à continuer par tels détours qu'on voudra, des mouvemens ou des efforts que des embarras empêchent de pouvoir être faits en ligne droite, en plaçant ces Poulies (appellées alors *Poulies de renvoi*) à tous les angles de ces détours, une à chaque angle; mais encore en ce qu'elles nous mettent en état d'employer beaucoup plus de force, que nous ne pourrions faire ſans elles, contre le fardeau à ſoûtenir ou à enlever: elles nous mettent, dis-je, en état de tirer de haut en bas par deſſus elles, & par-là de nous ſecourir de toute la peſanteur de notre corps, que nous aurions même à ſoûtenir avec le fardeau, en le tirant ou ſoulevant directement de bas en haut. La Poulie A de la Fig. 109. fait, dis-je, qu'une main appliquée en R contre le poids D, y eſt ſecourue de tout le poids du corps de celui qui, ainſi placé, tire contre ce poids D; au lieu qu'en A cette main n'auroit que ſa ſeule force pour agir contre ce poids ſans le ſecours de cette Poulie, ni d'aucune autre machine. Ce ſecours du poids de notre corps, eſt ce qui nous fait toûjours tirer plus aiſément & plus fortement de haut en bas que de bas en haut: c'eſt ce qui fait qu'un ſceau d'eau, par exemple, eſt beaucoup plus aiſé à tirer avec le ſecours d'une Poulie fixe, que directement & ſans elle.

On voit de-là, & du Corol. 19. *que l'utilité des Poulies conſiſte en ce que les mobiles* (Corol. 19.) *nous épargnent des forces, & que les fixes* (Corol. 20.) *nous en facilitent l'uſage. Voici preſentement la maniere de profiter de ces deux avantages en même tems, ſe ſervant de ces deux eſpeces de Poulies à la fois.*

COROLLAIRE XXI.

FIG. 111. 112. 113. 114. 115. Supposons presentement le poids D en équilibre avec la puissance R sur deux Poulies à la fois, dont une EGFK soit fixe, & l'autre MBNC mobile avec le poids D suspendu à son centre A, ou à sa chape AB : soit, dis-je, ce poids D soûtenu par la puissance R, appliquée à une des extrêmitez d'une corde RFKEMBNG, qui après avoir passé par dessus la Poulie fixe EKFG, & par dessous la mobile MBNC, ait son autre extrêmité attachée au bout G de la chape LG de la premiere EKFG de ces deux Poulies, fixe en son centre L dans les Fig. 111. 112. ou par de-là sa circonference au point S de sa chape GL prolongée dans les Fig. 113. 114. 115. n'ayant de mobilité qu'autour de ces points L, S.

L'équilibre supposé entre le poids D & la puissance R sur ces deux Poulies à la fois, rendant égales (*Ax.* 4.) les forces dont le cordon EM est tiré directement en sens contraires de E vers M, & de M vers E ; si l'on appelle P chacune de ces deux forces ; H, le sinus de l'angle MHN compris entre les deux cordons EM, GN, prolongez, lesquels touchent la Poulie MBNC ; & *h*, le sinus de la moitié de cet angle : l'on aura (*Corol.* 1.) R=P, & non seulement (*part.* 2.) P. D : : *h*. H. mais encore (*part.* 3.) P. D, : AM. MN. Donc aussi pour lors R. D : : *h*. H. Et R. D : : AM. MN. ainsi qu'il arriveroit (*part.* 2. 3.) si la puissance R étoit P. D'où l'on voit que cette puissance R peut avoir ici tout à la fois les deux avantages marquez dans les Corol. 18. 19. sçavoir (à cause de la Poulie mobile MBNC) de pouvoir être non seulement moindre (*Corol.* 2.) que le poids D en équilibre (*Hyp.*) avec elle, mais encore d'autant moindre (*Corol.* 19.) que l'angle MHN ou EHG sera plus petit que de 120. degrez, quoiqu'en raison differente ; & de plus (à cause de la Poulie fixe EKFG) de coûter d'autant moins à fournir (*Cor.* 20.) que la pesanteur du corps de celui qui tire en R, y peut beaucoup contribuer, outre qu'il peut encore se soula-

ger par tout ce qu'il pourra ajoûter d'autres poids en R.

SCHOLIE.

I. Il eſt viſible que les chapes LG doivent ſe diriger dans le précedent Corol. 20. de la maniere qu'on les voit dirigées dans les Fig. 111. 112. 113. 114. 115. Car, 1°. dans les Fig. 111. 112. dans leſquelles la Poulie EKFG eſt fixe en ſon centre L, autour duquel ſeulement elle eſt mobile indépendamment de ſa chape LG, qui l'eſt ſeulement auſſi autour de ce point fixe L ; cette chape en ce cas ne recevant d'impreſſion que ſuivant la direction GN du cordon attaché à ſon extrêmité G, il eſt manifeſte qu'elle doit toujours ſe diriger ſuivant cette ligne GN ; en ſorte que NGL ne ſoit plus qu'une ligne droite, qui prolongée, auſſi-bien que ME, concoure avec elle en H au deſſus ou au deſſous de la Poulie mobile MBNC, ſelon que ſon diamétre ſera plus grand ou plus petit que le rayon de la Poulie fixe EKFG : ſi ce diamétre & ce rayon étoient égaux, il eſt viſible que NL, ME, ſeroient paralleles entr'elles, & (*Lem.* 3. *Corol.* 15. *&* *Lem.* 6. *Cor.* 1.) à la direction DH du poids D. FIG. 111. 112.

2°. Dans les Fig. 113. 114. 115. dans leſquelles la Poulie EKFG eſt mobile non ſeulement autour de ſon centre L fixe dans la chape SG, mais encore avec ſon centre & cette chape autour du point S de cette même chape, fixe au-delà de la circonference de cette Poulie EKFG : ſi outre les cordons GN, EM, prolongez vers H juſqu'à leur rencontre (*part.* 1.) en ce point de la direction DH du poids D, on prolonge de même RF, ME, vers Q, juſqu'à leur rencontre en ce point, & qu'on mene la droite QO par le centre L de la même Poulie EKFG ; on verra que du concours d'action des forces (*Corol.* 1.) égales dont les cordons EM, FR, ſont tirez par le poids D, & par la puiſſance R, il en doit réſulter (*Lem.* 3. *part.* 4. *&* *Corol.* 1.) ſuivant la droite QLO, ſur la Poulie EKFG, & ſur ſa chape SG, une impreſſion qui les pouſſe ou qui les tire ſuivant LO : de ſorte que cette FIG. 113. 114. 115.

chape SG, tirée de plus suivant GN par le poids D, se trouve ici poussée ou tirée tout à la fois suivant deux directions differentes LO, NG, qui lui doivent visiblement faire prendre la position qu'on lui voit dans les Fig. 113. 114. 115. de maniere que cette chape SG ne sera en ligne droite avec GN, de même que LG l'est (*nomb.* 1.) dans les Fig. 111. 112. que lorsque les directions LO, NG, seront suivant une même ligne droite, comme dans la Fig. 115.

II. La force de l'impression suivant LO, résultante du concours de la force R suivant FR, & de ce que le poids D en exerce suivant EM, étant à cette force R (*part.* 2.) comme le sinus de l'angle RQM est au sinus de sa moitié, ou (*part.* 3.) comme la soutendante EF de l'arc EKF de la Poulie EKFG, embrassé par la corde RFKEMBNG, est au rayon LF de cette Poulie; & la force suivant GN étant (*Corol.* 1.) =P=R: l'on aura ici la force de l'impression suivant LO, à la force suivant GN, comme le sinus de l'angle RQM est au sinus de sa moitié, ou comme la soutendante EF est au rayon LF de la Poulie EKFG. Ce qui étant connu, la Sect. 6. ou la Définit. qui s'y trouvera, fera voir que la chape SG est ici un Levier appuyé en S, marquera dans le Corol. 2. de son Th. 21. la situation exacte que cette chape doit prendre ici dans les Fig. 113. 114. savoir, que cette situation qu'on y voit, doit être telle que les perpendiculaires menées du point d'apui S sur ces directions GN, LO, prolongées, soient entr'elles comme les sinus de l'angle RQM, & de sa moitié sont entr'eux, ou comme la soutendante EF est au rayon LF de la Poulie EKFG.

REMARQUE.

Fig. 102. & suivantes jusqu'à 115. Quoique la part. 3. du present Th. 14. ne fasse aucune mention des sinus, & que par son moyen dans la Théorie on puisse y avoir le rapport du poids D à chacune des puissances P, R, sans y employer de sinus: cependant comme l'on en a besoin pour connoître la sou-

tendante MN, que cette part. 3. y employe, il faudroit toûjours revenir aux sinus dans la Pratique & dans l'usage de cette part. 3. Le plus court chemin est de s'en tenir tout d'un coup aux sinus de la part. 2. puisqu'il faudroit plus d'Analogies & de calcul pour passer des sinus à la connoissance de la soutendante MN, & ensuite de cette connoissance à celle du rapport cherché, que d'aller tout d'un coup des sinus à ce rapport, comme dans la part. 2. D'où l'on voit que dans la Pratique l'usage de cette part. 2. est toûjours préferable à celui de la part. 3. quoiqu'à la premiere vûe celle-ci paroisse plus simple que celle-là. La raison de cette préference sera la même pour la suite dans l'usage qu'on va faire de plusieurs Poulies mobiles à la fois.

THEOREME XV.

Soient deux puissances quelconques P, R, appliquées suivant telles directions MP, NR, qu'on voudra, aux centres mobiles M, N, de deux Poulies séparées, & soûtenues par le moyen d'une corde ACDLGKB, qui retenue à ses extrémitez par deux clous ou crochets A, B, s'appuye sur une Poulie fixe H en passant de part & d'autre par dessous les mobiles M, N, dans les Fig. 116. 117. ou embrassant seulement à contre-sens ces deux Poulies mobiles M, N, sans s'appuyer sur aucune fixe, comme dans la Fig. 118. FIG. 116. 117. 118.

I. *En cas d'équilibre entre les deux puissances P, R, appliquées aux centres M, N, de ces deux Poulies mobiles, & ainsi en action l'une contre l'autre suivant leurs directions quelconques MP, NR; ces deux puissances P, R, seront entr'elles en raison composée de la directe des sinus des angles AEL, LFB; compris entre les cordons prolongez qui touchent les Poulies mobiles, & de la reciproque des sinus des moitiez de ces angles; c'est-à-dire (en appellant E, F, les sinus des angles AEL, LFB; & e, f, les sinus de leurs moitiez)* P.R :: E×f.F×e.

II. *En ce cas d'équilibre, si l'on mene les soutendantes CD, GK, avec les rayons MC, MD, NG, NK, des Poulies mo-*

biles M, N, par les points C, D, G, K, où elles ſont touchées par les parties AC, DL, LG, KB, de la corde ACDLGKB; la puiſſance P, ſera auſſi à la puiſſance R, en raiſon compoſée de la directe des ſoutendantes CD, GK, & de la reciproque des rayons MC, NG, de ces Poulies; c'eſt-à-dire, P. R :: CD×NG. GK×MC.

III. *Reciproquement ſi ces deux puiſſances P, R, ſont entr'elles en celui qu'on voudra, de ces deux rapports marquez dans les part. 1. 2. elles ſeront ici en équilibre entr'elles.*

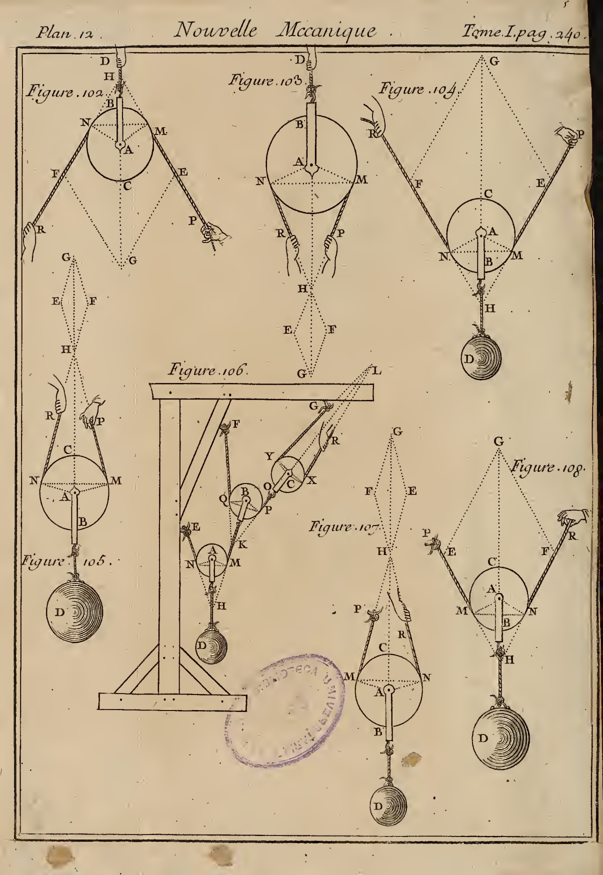
DEMONSTRATION.

PART. I. Outre les noms aſſignez dans l'énoncé de cette part. 1. ſoit auſſi appellée L chacune des réſiſtances ſuivant EL, FL, de la corde ACDLGKB contre les puiſſances P, R, leſquelles réſiſtances en équilibre (*Hyp.*) avec les forces directement contraires ſuivant LE, LF, ſont (*Ax.* 4. & *Th.* 14. *Corol.* 1.) égales entr'elles. Cela poſé, la part. 2. du Th. 14. donnera ici P. L :: E. *e*. Et L. R :: *f*. F. Donc (en multipliant par ordre) l'équilibre ici ſuppoſé y donnera toûjours P. R :: E×*f*. F×*e*. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

PART. II. En ce cas d'équilibre, ſi l'on appelle encore L chacune des réſiſtances de la corde ACDLGKB ſuivant EL, FL, la part. 3. du Th. 14. donnera P. L :: CD. MC. Et L. R :: NG. GK. Donc (en multipliant par ordre) on aura auſſi pour lors P. R :: CD×NG. GK×MC. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PART. III. Reciproquement par rapport aux part. 1. 2. à la fois, ſi P. R :: E×*f*. F×*e*. ou P. R :: CD×NG. GK×MC. il y aura équilibre entre les puiſſances P, R. Car ſi quelqu'une des deux, par exemple P, étoit trop grande ou trop petite pour faire ainſi équilibre avec l'autre R, ſoit une autre puiſſance quelconque S, qui appliquée à la place de P ſuivant ſa direction MP, faſſe effectivement équilibre avec R. Alors on auroit auſſi (*part.* 1.) S. R :: E×*f*. F×*e*. Et (*part.* 2.) S. R :: CD×NG. GK×MC. Par conſequent cette nouvelle puiſſance S ſeroit égale à P.

Donc


Figure. 102.
Figure. 103.
Figure. 104.
Figure. 105.
Figure. 106.
Figure. 107.
Figure. 108.

Donc (*Ax.* 2.) celle-ci P feroit pareillement équilibre avec R. *Ce qu'il falloit* 3°. *démontrer.*

COROLLAIRE I.

Il ſuit de la part. 1. que ſi pluſieurs puiſſances P, R, S, T, V, &c. appliquées à pluſieurs Poulies mobiles L, M, N, O, Q, &c. ſéparées comme dans les Fig. 119. 120. ſont en équilibre entr'elles ; ces puiſſances ſeront toutes, chacune à chacune, dans quelque ordre qu'on les prenne, en raiſon compoſée de la directe des ſinus des angles compris entre les tangentes de leurs Poulies, & de la réciproque des ſinus des moitiez de ces angles. FIG. 119. 120.

Car ſi les ſinus des angles *e*E*e*, *f*F*f* *g*G*g*, *h*H*h*, *k*K*k*, &c. compris entre les cordons touchans des Poulies L, M, N, O, Q, &c. ſont appellez E, F, G, H, K, &c. Et les ſinus des moitiez de ces angles, appellez *e*, *f*, *g*, *h*, *k*, &c. la part. 1. en ce cas d'équilibre,

Donnera
- P. R : : E×*f*. F×*e*.
- R. S : : F×*g*. G×*f*.
- S. T : : G×*h*. H×*g*.
- T. V : : H×*k*. K×*h*.
- &c.

Donc (en multipl. par ordre)
- P. R : : E×*f*. F×*e*.
- P. S : : E×*g*. G×*e*.
- P. T : : E×*h*. H×*e*.
- P. V : : E×*k*. K×*e*.
- R. S : : F×*g*. G×*f*.
- R. T : : F×*h*. H×*f*.
- R. V : : F×*k*. K×*f*.
- S. T : : G×*h*. H×*g*.
- S. V : : G×*k*. K×*g*.
- T. V : : H×*k*. K×*h*.
- &c.

Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE II.

Les puiſſances P, R, S, T, V, &c. demeurant encore en équilibre entr'elles (dans les Fig. 119. 120. du Corol. 1. ſi l'on y ajoûte les ſoutendantes & les rayons qu'on y voit par les points d'attouchement des Poulies mobiles ; la part. 2. fera voir auſſi que ces puiſſances ſeront toutes, chacune à chacune, dans quelque ordre qu'on les prenne en raiſon compoſée de la directe des ſoutendantes des arcs de leurs Poulies embraſſez par la corde qui les ſoûtient toutes, & de la reciproque des rayons de ces Poulies. Cette ſeconde partie, dis-je,

Donnera
- P.R :: $ee \times Mf$. $ff \times Le$.
- R.S :: $ff \times Ng$. $gg \times Mf$.
- S.T :: $gg \times Oh$. $hh \times Ng$.
- T.V :: $hh \times Qk$. $kk \times Oh$.

&c.

Donc (en multipl. par ordre)
- P.R :: $ee \times Mf$. $ff \times Le$.
- P.S :: $ee \times Ng$. $gg \times Le$.
- P.T :: $ee \times Oh$. $hh \times Le$.
- P.V :: $ee \times Qk$. $kk \times Le$.
- R.S :: $ff \times Ng$. $gg \times Mf$.
- R.T :: $ff \times Oh$. $hh \times Mf$.
- R.V :: $ff \times Qk$. $kk \times Mf$.
- S.T :: $gg \times Oh$. $hh \times Ng$.
- S.V :: $gg \times Qk$. $kk \times Ng$.
- T.V :: $hh \times Qk$. $kk \times Oh$.

&c.

Ce qu'il falloit ici démontrer.

COROLLAIRE III.

Il ſuit reciproquement de la part. 3. que ſi les puiſſances P, R, S, T, V, &c. appliquées comme dans les Corol. 1. 2. ſont entr'elles dans celle qu'on voudra des raiſons trouvées dans ces Corol. 1. 2. c'eſt-à-dire (*Corol.* 1.) chacune à chacune en raiſon compoſée de la directe des ſinus des angles compris entre les cordons touchans de leurs Poulies ſéparément mobiles, & de l'inverſe des ſinus des moitiez de ces angles; ou (*Corol.* 2.) en raiſon compoſée de la directe des ſoutendantes des arcs enveloppez de leurs Poulies, & de la reciproque des rayons de ces Poulies; ces puiſſances ſeront toutes en équilibre entr'elles. Car ſuivant la part. 3. l'on aura pour lors la puiſſance P en équilibre avec la puiſſance R, celle-ci avec la puiſſance S; cette puiſſance S avec la puiſſance T, la puiſſance T avec la puiſſance V, &c. Donc toutes ces puiſſances ſeront auſſi pour lors en équilibre entr'elles.

COROLLAIRE IV.

Si preſentement on ſuppoſe dans le preſent Th. 15. & dans les Corol. 1. 2. qui le ſuivent, que tous les angles compris entre les cordons touchans de chaque Poulie ſéparément mobile, ſont infiniment aigus, c'eſt-à-dire (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) que tous ces cordons ſont paralleles entr'eux deux à deux ſur chaque Poulie mobile ſans en excepter aucune; alors les puiſſances P, R, ſuppoſées en équilibre entr'elles dans les part. 1. 2. Fig. 116. 117. 118. & les puiſſances P, R, S, T, V, &c. ſuppoſées de même toutes en équilibre entr'elles dans les Corol. 1. 2. Fig. 119. 120. ſeront toutes égales entr'elles, tant dans les part. 1. 2. que dans les Corol. 1. 2. Car les angles compris chacun entre deux de ces cordons prolongez, ſe trouvant alors tous égaux entr'eux, & conſequemment auſſi leurs moitiez toutes égales entr'elles; tous les produits faits chacun de chacun des ſinus de chacun de ces angles totaux par le ſinus de la moitié de ſon voiſin,

FIG. 116. 117. 118. 119. 120.

marquez dans la part. 1. & dans le Corol. 1. seront alors égaux entr'eux: De même aussi les soutendantes par les points d'attouchement des Poulies mobiles, en devenant alors les diamétres; les produits marquez dans la part. 2. & dans le Corol. 2. seront pour lors tous égaux entre-eux. Donc (*part.* 1. 2. *&* *Corol.* 1. 2.) les deux puissances P, R, des part. 1. 2. Fig. 116. 117. 118. & toutes celles P, R, S, T, V, &c. des Corol. 1. 2. Fig. 119. 120. supposées en équilibre entr'elles sur des Poulies mobiles touchées de cordons paralleles entr'eux deux à deux sur chacune, seront alors égales entr'elles.

COROLLAIRE V.

Il suit reciproquement de la part. 3. & du Corol. 3. que si toutes ces puissances sont ainsi égales entr'elles, & appliquées à des Poulies séparément mobiles touchées toutes par des cordons paralleles entr'eux deux à deux sur chacune; toutes ces puissances seront alors en équilibre entr'elles dans chacune des Fig. 116. 117. 118. 119. 120. puisque suivant le raisonnement du précedent Corol. 4. elles auront alors entr'elles dans chacune de ces Figures les rapports exigez pour cet équilibre par la part. 3. & par le Corol. 3.

COROLLAIRE VI.

Il suit enfin des part. 1. 2. & des Corol. 1. 2. 4. que sur une infinité de cas dans lesquels deux ou plusieurs puissances peuvent faire équilibre entr'elles sur des Poulies séparément mobiles comme ci-dessus, il n'y en a que deux où ces puissances puissent être toutes égales entre-elles dans chacune des Figures du précedent Corol. 3. sçavoir (*part.* 1. *&* *Corol.* 1.) lorsque les produits faits chacun du sinus de chacun des angles compris entre les cordons touchans de chaque Poulie mobile, & du sinus de la moitié de chaque angle voisin, sont tous égaux entr'eux; ou (*part.* 2. *&* *Corol.* 2.) lorsque les produits faits chacun de chaque soutendante de chaque Poulie mobile,

& du rayon de chaque voisine, sont tous égaux entr'eux : & (*Corol.* 4.) lorsque ces cordons touchans sont tous paralleles deux à deux sur chaque Poulie mobile.

COROLLAIRE VII.

Il suit reciproquement de la part. 3. & des Corol. 3. 5. que ces deux cas du précedent Corol. 6. sont aussi les seuls où des puissances égales puissent faire équilibre entr'elles sur des Poulies mobiles comme ci-dessus ; puisqu'ils sont les seuls (*Corol.* 6.) qui puissent rendre égaux les produits dans les rapports desquels ces puissances doivent être (*part.* 3. & *Corol.* 3. 5.) pour faire ainsi équilibre entr'elles.

Ces deux derniers Corollaires 6. 7. font encore voir combien on se méprendroit, si l'on prenoit ici comme generale la proposition rapportée dans la reflexion qui suit le Corol. 12. du Th. 14. & suivant laquelle (si elle étoit aussi generalement vraye qu'on l'a énoncée) des puissances égales appliquées comme ci-dessus, seroient toûjours en équilibre entr'elles, & reciproquement toûjours égales entr'elles dès qu'elles seroient ainsi en équilibre ; ce que les deux derniers Corol. 6. 7. font cependant voir n'être vrai que dans les deux cas qui y sont marquez, & faux dans tous les autres à l'infini.

SCHOLIE.

Pour ce qui est des résistances des clous ou crochets A, B, ou bien des puissances qu'il faudroit en leurs places pour les suppléer, l'égale tension de la corde qui passe de l'un à l'autre de ces crochets par dessous ou par dessus les Poulies supposées, fait assez voir que ces résistances en cas d'équilibre doivent être égales entr'elles. Cela se-roit encore par les part. 1. 2. du Th. 14. & par les part. 1. 2. & Corol. 1. 2. du present Th. 15. Car les noms demeurant ici les mêmes que dans le Corol. 1. de ce Théoreme-ci, & appellant de plus ici A, B, les résistances des crochets de ces noms, ou des puissances, qui mises en leurs places, les suppléeroient.

FIG. 116. 117. 118. I. L'on aura ici pour les Fig. 116. 117. 118. { (*Th.* 14. *part.* 2.) A. P :: *e*. E. / (*Th.* 15. *part.* 1.) P. R :: E×*f*. F×*e*. / (*Th.* 14. *part.* 2.) R. B :: F. *f*.

Donc (en multipliant par ordre) A. B :: E×*e*×F×*f*. E×*e*×F×*f* :: 1. 1. c'eſt-à-dire, A=B. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

Autrement. L'on aura auſſi pour les mêmes Fig. { (*Th.* 14. *p.* 3.) A. P :: MC. CD. / (*Th.* 15. *p.* 2.) P. R :: CD×NG. GK×MC. / (*Th.* 14. *p.* 3.) R. B :: GK. NG.

Donc (en mult. par ordre) A. B :: MC×CD×NG×GK. MC×CD×GK×NG :: 1. 1. c'eſt-à-dire encore, A=B. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

FIG. 119. 120. II. L'on aura pareillement ici pour les Fig. 119. 120. { (*Th.* 14. *part.* 2.) A. P :: *e*. E. / (*Th.* 15. *Cor.* 1.) P. V :: E×*k*. K×*e*. / (*Th.* 14. *part.* 2.) V. B :: K. *k*.

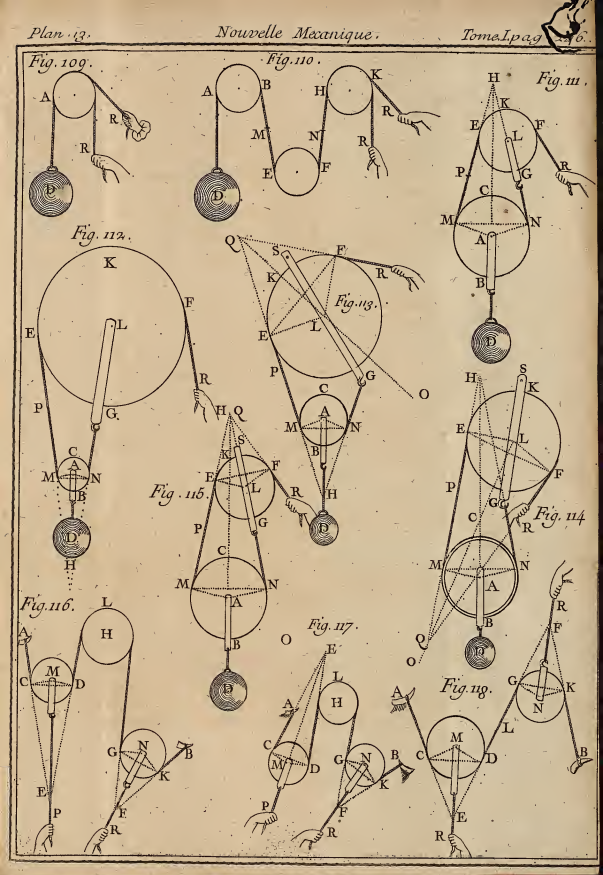
Donc (en multipliant par ordre) A. B :: E×*e*×K×*k*. E×*e*×K×*k* :: 1. 1. c'eſt-à-dire, A=B. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

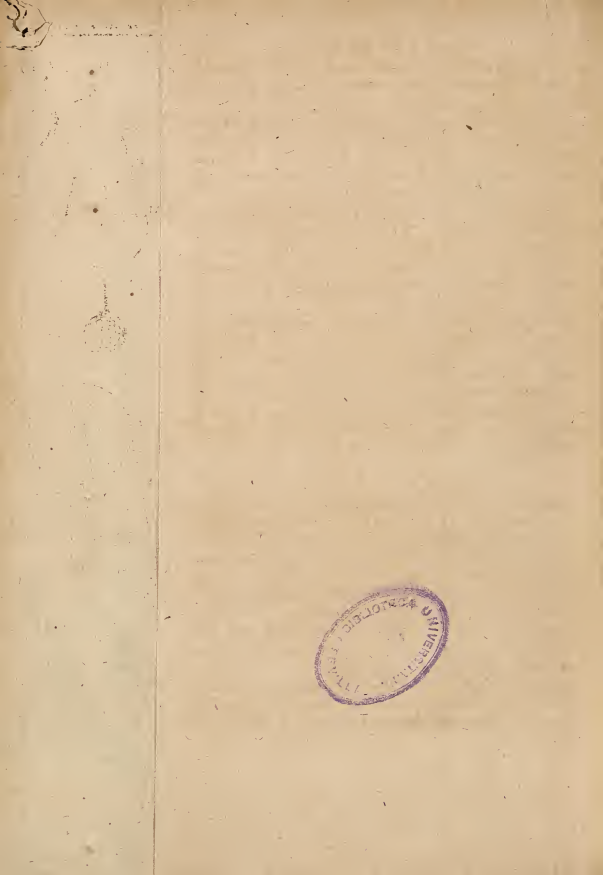
Autrement. L'on aura auſſi pour les mêmes Figures { (*Th.* 14. *p.* 3.) A. P :: L*e*. *ee*. / (*Th.* 15. *Cor.* 2.) P. V :: *ee*×Q*k*. *kk*×L*e*. / (*Th.* 14. *p.* 3.) V. B :: *kk*. Q*k*.

Donc (en multipliant par ordre) A. B :: L*e*×*ee*×Q*k*×*kk*. L*e*×*ee*×Q*k*×*kk* :: 1. 1. c'eſt-à-dire encore, A=B. *Ce qu'il falloit encore* 2°. *démontrer.*

THEOREME XVI.

FIG. 121. 122. 123. *Si deux poids ou deux puiſſances P, R, appliquées aux deux extrêmitez d'une corde qui paſſe par deſſus deux Poulies fixes B, C, en paſſant par deſſous une des deux Poulies mobiles & inégales MLN, EGF, au centre de laquelle pende un*


Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.


BIBLIOTECA



poids D que ces puissances soûtiennent en équilibre avec chacune de ces deux Poulies successivement prises, & à même hauteur de leur centre. Pour cela,

I *Ces deux puissances P, R, doivent être moindres en soûtenant ce poids D avec la grande Poulie MLN qu'avec la petite EGF, si leurs directions BM, CN, BE, CF, concourent deux à deux en H, K, au dessous du centre commun A de de ces deux Poulies mobiles, comme dans la Fig.* 121. FIG. 121.

II. *Au contraire, si les points de concours H, K, des directions BM, CN, & BE, CF, des puissances P & R, se trouvent tous deux au dessus du centre A, comme dans la Fig.* 122. *ces deux puissances doivent être plus grandes en soûtenant le même poids D avec la grande Poulie MLN qu'avec la petite EGF.* FIG. 122.

III. *Si enfin le point de concours H des directions BM, CN, étoit au dessus du centre A, & le point de concours K des directions BE, CF, au dessous de ce centre A, comme dans la Fig.* 123. *les puissances P, R, seroient moindres ou plus grandes en soûtenant le même poids D avec la grande Poulie MLN qu'en le soûtenant avec la petite EGF, ou égales de part & d'autre, selon que l'angle MHN seroit plus petit ou plus grand que l'angle EKF, ou égal à lui.* FIG. 123.

DEMONSTRATION.

En ce cas d'équilibre des puissances P, R, avec le poids D successivement sur chacune des Poulies mobiles LMN, EGF, à même hauteur de leur centre A, l'on aura (*Th.* 14. *part.* 2.) ce poids D à chacune des puissances P, R, comme le sinus de l'angle BHC ou MHN au sinus de sa moitié sur la grande Poulie MLN, & aussi comme le sinus de l'angle BKC ou EKF au sinus de sa moitié sur la petite Poulie EGF. Or le Corol. 1. du Lemme 8. fait voir que plus un angle est aigu, plus est grande la raison de son sinus au sinus de sa moitié. Donc, FIG. 121. 122. 123.

PART. I. L'angle MHN étant plus aigu que l'angle EKF, lorsqu'ils sont tous deux au dessous du centre A, le poids D sera pour lors à chacune des puissances P, R, en plus FIG. 121.

grande raison, lorsqu'elles le soûtiendront avec la petite EGF à même hauteur de leur centre commun A. Donc aussi en ce cas des concours H, K, des directions des puissances P, R, touchantes des Poulies MLN, EGF, tous deux au dessous de leur centre commun A; ces deux puissances P, R, doivent être moindres pour soûtenir le poids D avec la grande Poulie MLN, que pour le soûtenir avec la petite EGF à même hauteur de leur centre commun A. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

Fig. 122. PART. II. Au contraire l'angle MHN étant moins aigu que l'angle EKF, lorsqu'ils sont tous deux au dessus du centre A, le poids D sera pour lors à chacune des puissances P, R, en moindre raison, lorsqu'elles le soûtiendront avec la grande Poulie mobile MLN, que lorsqu'elles le soûtiendront avec la petite EGF à même hauteur de leur centre commun A. Donc en ce cas des points de concours H, K, des directions des puissances P, R, touchantes des Poulies mobiles MLN, EGF, tous deux au dessus de leur centre commun A; ces deux puissances P, R, doivent être plus grandes pour soûtenir le poids D avec la grande Poulie MLN, que pour le soûtenir avec la petite EGF à même hauteur de leur centre commun A. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

Fig. 123. PART. III. Mais si des deux angles MHN, EKF, l'un étoit au dessus de ce centre commun A, & l'autre au dessous; sçavoir, MHN au dessus, & EKF au dessous, le contraire ne pouvant jamais arriver; le poids D seroit en plus grande, ou en plus petite, ou en même raison aux puissances P, R, lorsqu'elles le soûtiendroient avec la grande Poulie MNL, & la petite EGF, selon que l'angle MHN seroit plus petit, plus grand, ou égal à l'angle EKF. Donc en ce cas de ces angles de part & d'autre du centre A, les deux puissances P, R, seront plus petites, plus grandes ou les mêmes, en soûtenant le poids D avec la grande Poulie mobile MLN, qu'en le soûtenant avec la petite EGF, selon que l'angle MHN sera plus grand, plus petit, ou égal à l'angle EKF. *Ce qu'il falloit* 3°. *démontrer.*

AUTRE

AUTRE DEMONSTRATION.

Par les points d'attouchement M, N, E, F, des Poulies mobiles MLN, EGF, soient imaginées les soutendantes MN, EF, avec les rayons AM, AN, AE, AF, menées de leur centre commun A. Il est visible que chacun des angles MAN, EAF, étant le complement à deux droits, de chacun des angles MHN, EKF, qui leur répondent, plus chacun de ces deux derniers angles MHN, EKF, sera petit, plus au contraire sera grand chacun des deux autres MAN, EAF, qui en sera toûjours le complement à deux droits; & que plus chacun de ces deux-ci sera grand, plus aussi sera grande la raison de la base ou soutendante MN, ou EF, au rayon AM, ou AE, qui lui répond. Donc plus chacun des angles MHN, EKF, sera petit, plus au contraire sera grande la raison de la soutendante MN, ou EF, au rayon AM, ou AE, qui lui répond. Or le cas present d'équilibre des puissances P, R, avec le poids D successivement sur chacune des Poulies mobiles MLN, EGF, exige (*Th.* 14. *part.* 3.) ce poids D à chacune de ces puissances P, R, comme la soutendante MN est au rayon AM sur la plus grande MLN de ces deux Poulies mobiles, & comme la soutendante EF est au rayon AE sur la plus petite EGF. Donc aussi en ce cas d'équilibre plus chacun des angles MHN, EKF, sera petit, plus au contraire sera grande la raison du poids D à chacune des puissances P, R. Or, FIG. 121. 122. 123.

PART. I. L'angle MHN est visiblement plus petit que l'angle EKF, lorsqu'ils sont tous deux au dessous du centre A. Donc en cas des points de concours H, K, tous deux au dessous du centre A, le poids D sera toûjours en plus grande raison à chacune des puissances P, R, lorsqu'elles le soûtiendront avec la grande Poulie mobile MLN, que lorsqu'elles le soûtiendront avec la petite EGF; & par consequent ces deux puissances P, R, doivent être alors moindre sur la grande Poulie mobile MLN, que sur la petite EGF, pour les soûtenir l'une FIG. 121.

après l'autre avec le même poids D à même hauteur de leur centre commun A. *Ce qu'il falloit encore* 1°. *démontrer.*

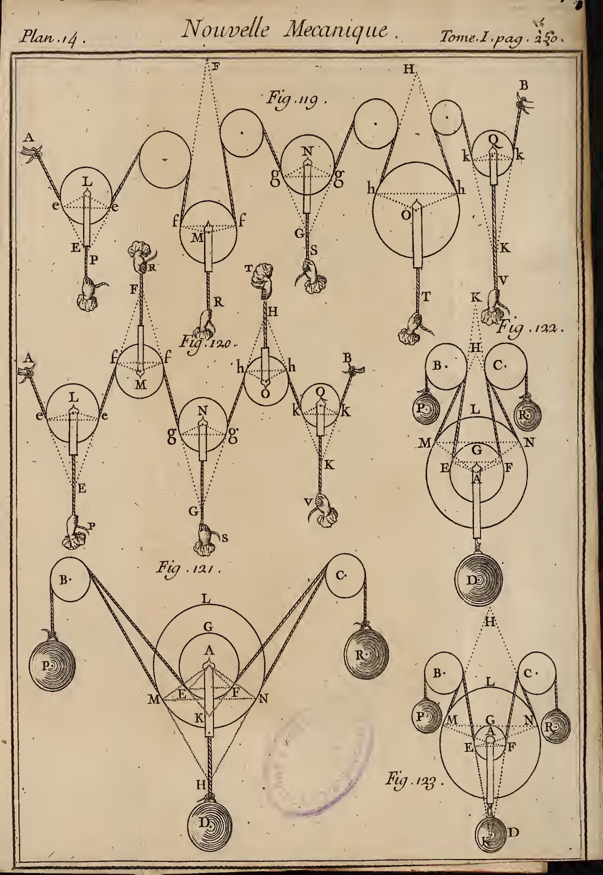
Fig. 122. PART II. L'angle MHN étant plus grand que l'angle EKF, lorsqu'ils sont tous deux au dessus de ce centre A, il suit de même que les puissances P, R, doivent au contraire être alors plus grandes pour soûtenir le poids D avec la grande Poulie mobile MLN, que pour le soûtenir avec la petite EGF à même hauteur de leur centre commun A. *Ce qu'il falloit encore* 2°. *démontrer.*

Fig. 123. PART. III. Il suit pareillement que lorsque les angles MHN, EKF, se trouvent de part & d'autre du centre A, les deux puissances P, R, doivent être plus petites, plus grandes, ou les mêmes pour soûtenir le poids D avec la grande Poulie mobile MLN, que pour le soûtenir avec la petite EGF à même hauteur de leur centre commun A, selon que l'angle MHN sera plus grand, plus petit, ou égal à l'angle EKF. *Ce qu'il falloit encore* 3°. *démonerer.*

SCHOLIE.

Fig. 121. 122. 123. Il est à remarquer que si les directions des puissances P, R, étoient ici deux à deux paralleles entr'elles sur chacune des Poulies mobiles MLN, EGF, l'inégalité de ces deux Poulies n'en apporteroit plus aucune entre les deux puissances P, R, de l'une, ni entre les deux de l'autre pour soûtenir le même poids D successivement suspendu au centre A de chacune de ces deux Poulies mobiles; puisque ce parallelisme supposé de part & d'autre, rendroit aussi de part & d'autre (*Th.* 14. *Corol.* 2.) ce même poids D double de chacune de ces deux puissances sur chacune de ces deux Poulies mobiles. Mais il est visible que ce double parallelisme seroit ici impossible, puisque si BM étoit parallele à CN, & BE à CF, les soutendantes MN, EF, seroient alors diamétres égaux des Poulies mobiles MLN, EGF, lesquelles consequemment seroient alors égales entr'elles; ce qui est contre l'hypothese. Il ne peut donc y avoir ici de parallelisme qu'entre les

[library stamp]


Fig. 119.
Fig. 120.
Fig. 121.
Fig. 122.
Fig. 123.

deux touchantes d'une de ces deux Poulies mobiles MLN, EGF, pendant que les deux touchantes de l'autre feront quelque angle entr'elles.

En ce dernier cas de deux touchantes d'une des deux Poulies mobiles, paralleles entr'elles, pendant que les deux touchantes de l'autre font entr'elles quelqu'angle fini que ce soit, le present Th. 16. fait voir que les deux puissances P, R, qui soûtiendroient le poids D avec des directions paralleles entr'elles, seroient moindres que les deux autres qui le soûtiendroient avec des directions concourantes en quelque point que ce fût, & même (*Th.* 14. *Corol.* 7. 10.) les plus petites qui le puissent soûtenir. Ainsi ce parallelisme pouvant également être entre les deux touchantes de la grande Poulie mobile MLN, & entre les deux de la petite EGF, selon l'éloignement des Poulies fixes B, C, entr'elles; chacune de ces ceux Poulies mobiles MLN, EGF, peut ainsi également requerir deux puissances P, R, moindre que ne requeroit l'autre, pour être soûtenues l'une après l'autre avec un même poids D à même hauteur de leur centre commun A.

Voilà jusqu'ici pour les Poulies simples & détachées les unes des autres: voici presentement pour celles qui, attachées ensemble à une chape commune par leurs centres, autour desquels elles sont mobiles dans cette chape, font cet assemblage, qu'on appelle Moufle *dans la Déf.* 18.

THEOREME XVII.

Soit la puissance R en équilibre avec le poids D qu'elle soûtienne avec une Moufle mobile & des Poulies fixes, comme dans la Fig. 124. *ou avec deux Moufles, dont une soit fixe en Q, & l'autre mobile, comme dans les Fig.* 125. 126. *par le moyen d'une corde RSR*aa*OR*bb*NR*ee*M, laquelle embrassant toutes les Poulies qu'on voit ici, ait une de ses extrêmitez retenue par la puissance R, & l'autre fixement attachée en M à un crochet dans la Fig.* 124. *& à la Moufle superieure QM dans les Fig.* 125. 126. *En ce cas d'équilibre,* FIG. 124. 125. 126.

I. *Le poids D sera toûjours à la puissance R, comme la somme des produits faits chacun du sinus de l'angle compris entre les cordons touchans de chaque Poulie mobile, multiplié par tous les sinus des moitiez des autres angles pareillement compris entre les cordons touchans de chacune de toutes les Poulies mobiles, sera au produit fait des sinus des moitiez de tous les angles ainsi compris entre les cordons touchans de tout ce qu'il y a ici de Poulies mobiles.*

II. *Le poids sera toûjours à la puissance R; comme la somme des produits faits chacun de la soutendante de chaque Poulie mobile, multipliée par les rayons de toutes les autres pareillement mobiles, sera au produit des rayons de tout ce qu'il y a ici de ces Poulies mobiles.*

DEMONSTRATION.

Soient les soutendantes des Poulies mobiles L, K, H, c'est-à-dire, de leurs arcs embrassez par la corde qui les soûtient	*aa*,	*bb*,	*ee*.
Les rayons de ces Poulies mobiles	L*a*,	K*b*,	H*e*;
Les angles compris entre les tangentes de chacune de ces Poulies, menées par les extrêmitez des soutendantes	RAO,	RBN,	REM.
Les sinus de ces angles totaux	A,	B,	E.
Les sinus de leurs moitiez	*a*,	*b*,	*e*.
Parties du poids D soûtenues par les Poulies L, K, H,	X,	Y,	Z.
Force de tension de la corde, par tout égale (*Th.* 14. *Corol.* 1.) à la puissance R	R,	R,	R.

PART. I. L'on aura par tout ici (*Th.* 14. *part.* 2.) X. R : : A. *a*. Et R. Y : : *b*. B. Donc (en multipliant par or-

dre) X. Y : : A×*b*. B×*a*. Et (en composant) X—+Y. Y : : A×*b* —+B×*a*. B×*a*. Mais on vient de voir Y. R : : B. *b*. Donc (en multipliant par ordre) X—+Y. R : : A×*b*—+B×*a*. *a*×*b*. Or (*Th.* 14. *part.* 2.) R. Z : : *e*. E. Donc (en multipliant par ordre) X—+Y. Z : : A×*b*×*e*—+B×*a*×*e*. E×*a*×*b*. Et (en composant) X—+Y—+Z. Z : : A×*b*×*e*—+B×*a*×*e*—+E×*a*×*b*. E×*a*×*b*. Mais on vient de voir Z. R : : E. *e*. Donc (en multipliant encore par ordre) X—+Y—+Z. R : : A×*b*×*e* —+B×*a*×*e*—+E×*a*×*b*. *a*×*b*×*e*. Or (*Hyp.*) D=X—+Y—+Z. Donc aussi D. R : : A×*b*×*e*—+B×*a*×*e*—+E×*a*×*b*. *a*×*b*×*e*. Et toûjours de même, quelque nombre de Poulies mobiles qu'on puisse ici supposer. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

PART. II. En ce cas d'équilibre l'on aura aussi (*Th.* 14. *part.* 3.) X. R : : *aa*. L*a*. Et R. Y : : K*b*. *bb*. Donc (en multipliant par ordre) X. Y : : *aa*×K*b*. *bb*×L*a*. Et (en composant) X—+Y. Y : : *aa*×K*b*—+*bb*×L*a*. *bb*×L*a*. Mais on vient de voir Y. R : : *bb*. K*b*. Donc (en multipliant par ordre) X—+Y. R : : *aa*×K*b*—+*bb*×L*a*. L*a*×K*b*. Or (*Th.* 14. *part.* 3.) R. Z : : H*e*. *ee*. Donc (en multipliant par ordre) X—+Y. Z : : *aa*×K*b*×H*e*—+*bb*×L*a*×H*e*. L*a*×K*b*×*ee*. Et (en composant) X—+Y—+Z. Z : : *aa*×K*b*×H*e*—+*bb*×L*a*×H*e*—+L*a*× K*b*×*ee*. L*a*×K*b*×*ee*. Mais on vient de voir Z. R : : *ee*. H*e*. Donc (en multipliant encore par ordre) X—+Y—+Z. R : : *aa*×K*b*×H*e*—+*bb*×L*a*×H*e*—+*ee*×L*a*×K*b*. L*a*×K*b*×H*e*. Or (*Hyp.*) D=X—+Y—+Z. Donc D. R : : *aa*×K*b*×H*e* —+*bb*×L*a*×H*e*—+*ee*×L*a*×K*b*. L*a*×K*b*×H*e*. Et toûjours de même, quelque nombre de Poulies mobiles qu'on puisse ici supposer. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

COROLLAIRE I.

Il suit de la part. 1. que le poids D seroit à la puissance R, comme le double du nombre des Poulies mobiles est à l'unité, si tous les cordons touchans de ces Poulies mobiles L, K, H, &c. étoient parallèles entr'eux deux à deux sur chacune. Car les angles RAO, RBN, REM, &c. étant alors tous (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) infiniment aigus,

& égaux entr'eux, auſſi-bien que leurs moitiez ; l'on auroit pour lors (*Lem.* 7.) $A = 2a$, $B = 2b$, $E = 2e$, &c. Donc la ſubſtitution des ſeconds termes de ces égalitez au lieu des premiers dans la derniere analogie de la démonſtration de la part. 1. donneroit ici pour ce cas de paralleliſme deux à deux des cordons touchans chacune de toutes les Poulies mobiles, D. R : : $2a \times b \times e + 2b \times a \times e + 2e \times a \times b$. $a \times b \times e$: : $2 + 2 + 2$. 1 : : 6. 1. C'eſt-à-dire, que le poids D ſeroit alors à la puiſſance R, comme le double du nombre des Poulies mobiles eſt à l'unité.

COROLLAIRE II.

La même choſe ſuit auſſi de la part. 2. Car en ce cas de paralleliſme deux à deux des cordons touchans chacune de toutes les Poulies mobiles, leurs ſoutendantes *aa*, *bb*, *ee*, &c. en devenant les diamétres, l'on aura pour lors $aa = 2La$, $bb = 2Kb$, $ee = 2He$, &c. Par conſequent la ſubſtitution des ſeconds termes de ces égalitez au lieu des premiers dans la derniere analogie de la démonſtration de la part. 2. donneroit ici pour ce cas de paralleliſme deux à deux des cordons touchans chacune de toutes les Poulies mobiles, D. R : : $2La \times Kb \times He + 2Kb \times La \times He + 2He \times La \times Kb$. $La \times Kb \times He$: : $2 + 2 + 2$. 1 : : 6. 1. c'eſt-à-dire encore, le poids D alors à la puiſſance R, comme le double du nombre des Poulies mobiles eſt à l'unité, ainſi que dans le précedent Corol. 1.

COROLLAIRE III.

Il ſuit encore de la part. 1. que plus les angles RAO, RBN, REM, &c. compris entre les cordons touchans de chacune des Poulies mobiles L, K, H, &c. ſeront grands, plus ſera grande la puiſſance R requiſe pour faire ici équilibre avec le poids D. Car les ſinus A, B, E, &c. de ces angles totaux étant (*Lem.* 8. *Corol.* 6.) aux ſinus de leurs moitiez en raiſon d'autant moindre que ces angles ſont plus grands ; & ces ſinus A, B, E, &c. d'angles to-

taux étant tous compris dans le troisiéme terme de la derniere analogie de la démonstration de la part. 1. au lieu que le quatriéme terme ne comprend que les sinus des moitiez de ces angles totaux ; il suit que ce quatriéme terme sera au troisiéme en raison d'autant plus grande que ces angles totaux RAO, RBN, REM, &c. seront plus grands. Mais suivant cette analogie, la puissance R, qui soûtient ici le poids D, est à ce poids comme le quatriéme terme est au troisiéme. Donc cette puissance R requise pour soûtenir ici le poids D, y doit être d'autant plus grande (quoiqu'en raison differente) que les angles RAO, RBN, REM, &c. compris entre les cordons touchans de chacune des Poulies mobiles L, K, H, &c. y seront plus grands, ou (ce qui revient au même) cette puissance R doit être d'autant moindre que ces angles seront plus petits. De sorte que la moindre que cette puissance R puisse être pour faire équilibre ici avec le poids D, c'est lorsque tous ces angles RAO, RBN, REM, &c. seront infiniment aigus, ou (*Lem. 6. Corol.* 1.) que les cordons touchans des Poulies mobiles, seront paralleles entr'eux comme dans les Corol. 1. 2. Ainsi suivant ces deux mêmes Corol. 1. 2. lorsque cette puissance R est au poids D, comme l'unité est au double du nombre de ces Poulies mobiles, c'est alors qu'elle est la moindre de tout ce qu'il y en peut avoir ici de successivement en équilibre avec ce même poids dans toutes les varietez possibles des angles compris entre les cordons touchans de chacune des Poulies mobiles L, K, H, &c. c'est-à-dire, dans toutes les positions possibles des parties de la corde qui embrasse ces Poulies.

COROLLAIRE IV.

La même chose suit aussi de la part. 2. Car plus les angles RAO, RBN, REM, &c. compris entre les touchantes des Poulies mobiles L, K, H, &c. seront grands, plus leurs complemens (à deux droits) *a*L*a*, *b*K*b*, *e*H*e*, &c. seront petits ; & consequemment aussi moins sera grande

la raiſon de leurs ſoutendantes *aa*, *bb*, *ee*; &c. aux rayons L*a*, K*b*, H*e*, &c. de ces Poulies mobiles. Donc ces ſoutendantes étant toutes compriſes dans le troiſiéme terme de la derniere analogie de la démonſtration de la part. 2. au lieu que les rayons ſont ſeuls compris dans le quatriéme; la raiſon du troiſiéme terme au quatriéme de cette analogie, & conſequemment auſſi du premier D au ſecond R, ſera d'autant moins grande que les angles RAO, RBN, REM, &c. le ſeront davantage. Donc au contraire la puiſſance R, pour faire équilibre ici avec le poids D, doit y être d'autant plus grande (quoiqu'en raiſon differente) que ces angles le ſeront davantage, ainſi qu'on l'a déja vû dans le précedent Corol. 3. conformément aux Corol. 10. 12. du Th. 14. D'où il ſuit encore, comme dans le précedent Corol. 3. que la plus petite que cette puiſſance R puiſſe être pour ſoûtenir ici le poids D, c'eſt d'être à lui comme l'unité eſt au double du nombre des Poulies mobiles; ſçavoir (*Corol.* 1. 2.) lorſque les parties de la corde, touchantes de ces Poulies, ſont toutes paralleles entr'elles.

SCHOLIE.

I. Il eſt manifeſte que quand la puiſſance R ſeroit appliquée en P au cordon P*a*, qu'elle tire ici ſuivant *a*P de bas en haut de la même force qu'elle tire ici ſuivant SR de haut en bas; le rapport de cette puiſſance ou force R en P, au poids D en équilibre (*Hyp.*) avec elle, ſeroit encore le même que ci-deſſus; puiſque (*Th.* 14. *Corol.* 1.) le cordon *a*P ſeroit alors auſſi fortement tiré par la puiſſance R appliquée en P; & agiſſant de bas en haut ſuivant *a*P, que par cette même puiſſance R agiſſante de haut en bas ſuivant SR, ſuppoſé (dis-je) que cette puiſſance employât préciſément la même force de part & d'autre contre le poids D. Mais on voit dans le Corol. 19. du Th. 14. qu'il eſt bien plus facile d'employer cette quantité de force en tirant de haut en bas, qu'en tirant de bas en haut; c'eſt pour cela qu'on n'exprime point

ici

ici les Figures du second de ces deux cas, lesquelles peuvent aisément être supplées par celles du premier, qu'on voit ici Fig. 124. 125. 126. en imaginant ainsi la puissance R en P, tirant de bas en haut le cordon *a*P de la même force qu'elle tire en agissant de haut en bas suivant SR.

II. On voit aussi, suivant le present Th. 17. comment un homme peut s'élever soi-même (ainsi qu'on le voit dans les Eglises qu'on veut nettoyer de haut en bas) à la hauteur d'une voute par le moyen de deux Moufles, dont la superieure soit attachée en Q à cette voute; puisque si l'on imagine que le poids D soit un panier dans lequel soit cet homme, & que la partie SR de la corde descende jusqu'à lui, en sorte que R soit la main de cet homme; le present Th. 17. fait voir qu'il lui faudra beaucoup moins de force à cette main pour élever le poids de son corps appuyé sur le fonds du panier, que tout ce fardeau D fait de lui & du panier, ne pese avec toute la corde & la Moufle inferieure qui doit être enlevée avec lui; & qu'il peut s'enlever ainsi avec d'autant moins de peine qu'il y aura plus de Poulies employées dans les deux Moufles dont il se servira pour cet effet.

Voilà jusqu'ici pour juger de l'avantage des Moufles dans le cas où un des bouts de la corde qui embrasse leurs Poulies est fixe: sçavoir, fixement attaché à un crochet fixe, comme dans la Fig. 124. ou à la Moufle superieure qui est aussi toûjours fixe, comme dans les Fig. 125. 126. Voici presentement pour le cas où cette corde tirée par la puissance qui soûtient le poids, est attachée par son autre extrêmité à la Moufle inferieure toûjours mobile avec ce poids.

THEOREME XVIII.

Soit encore la puissance R en équilibre avec le poids D qu'elle soûtienne avec une Moufle & des Poulies fixes, comme dans la Fig. 127. ou avec deux Moufles, dont l'une soit fixe en Q, & l'autre mobile, comme dans les Fig. 128. FIG. 127. 128. 129.

129. *soit presentement attachée à la Moufle mobile en M, la corde MRTeeRNbbROaaRSR, qui retenue par la puissance R appliquée à son autre extrêmité, embrasse encore toutes les Poulies, tant fixes que mobiles, comme on le voit dans les Fig. 127. 128. 129. En ce cas d'équilibre, si d'un point F quelconque du cordon MR on imagine FG perpendiculaire en G sur MG parallele à la direction CD du poids D;*

I. *Ce poids D sera toûjours à la puissance R, comme la somme des produits faits chacun du sinus de l'angle compris entre les tangentes de chaque Poulie mobile, multiplié par tous les sinus des moitiez des angles pareillement compris entre les tangentes de toutes les autres Poulies mobiles: comme cette somme (dis-je) multipliée par le sinus total ou de l'angle droit MGF, & augmentée du produit du sinus de l'angle MFG par les sinus des moitiez de tous les angles ainsi compris entre les tangentes de toutes les Poulies mobiles, sera au produit du sinus total ou de l'angle droit MGF par tous les sinus de ces mêmes moitiez d'angles.*

II. *Le poids D sera aussi toûjours alors à la puissance R, comme la somme des produits faits chacun de la soutendante de chaque Poulie mobile, multipliée par les rayons de toutes les autres Poulies pareillement mobiles: comme cette somme (dis-je encore) multipliée par MF, & augmentée du produit de MG par les rayons de toutes les Poulies mobiles, sera au produit de MF par tous ces mêmes rayons.*

DEMONSTRATION.

Soient les soutendantes des Poulies mobiles L, K, H, c'est-à-dire, de leurs arcs embrassez par la corde qui les soûtient	*aa*,	*bb*,	*ee*.
Les rayons de ces Poulies mobiles	L*a*,	K*b*,	H*e*.
Les angles compris entre les tangentes de chacune de ces Poulies, menées par les extrêmitez des soutendantes	RAO,	RBN,	RET.

Les finus de ces angles	A,	B,	E.
Les finus de leurs moitiez	a,	b,	e.
Le finus de l'angle MFG	F, .	.	.
Le finus total ou de l'angle droit MGF.	G, .	.	.
Parties du poids D foutenues par le cordon MR, & par les Poulies L, K, H,	V, X,	Y,	Z.
Force de tenfion de la corde, par tout égale (*Th.* 14. *Corol.* 1.) à la puiffance R	R, R,	R,	R.

PART. I. L'on aura (*Lem.* 3. *part.* 1.) V.R :: MG. MF (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) :: F. G. Et (*Th.* 14. *part.* 2.) R. X :: a. A. Donc (en multipliant par ordre) V.X :: F×a. G×A. Et (en compofant) V+X. X :: F×a+G×A. G×A. Mais on vient de voir X. R :: A. a. Donc (en multipliant par ordre) V+X. R :: F×a+G×A. G×a. Or (*Th.* 14. *part.* 2.) R. Y :: b. B. Donc (en multipliant par ordre (V+X. Y :: F×a×b+G×A×b. B×G×a. Et (en compofant (V+X+Y. Y :: F×a×b+G×A×b+G×B×a. G×B×a. Mais on vient de voir Y. R :: B. b. Donc (en multipliant par ordre) V+X+Y. R :: F×a×b+G×A×b+G×B×a. G×a×b. Or (*Th.* 14. *part.* 2.) R. Z :: e. E. Donc (en multipliant) V+X+Y. Z :: F×a×b×e+G×A×b×e+G×B×a×e. G×a×b×E. Et (en compofant) V+X+Y+Z. Z :: F×a×b×e+G×A×b×e+G×B×a×e+G×E×a×b. G×E×a×b. Mais on vient de voir Z. R :: E. e. Donc (en multipliant encore par ordre) V+X+Y+Z. R :: F×a×b×e+G×A×b×e+G×B×a×e+G×E×a×b. G×a×b×e. Or (*Hyp.*) D=V+X+Y+Z. Donc D. R :: F×a×b×e+G×A×b×e+G×B×a×e+G×E×a×b. G×a×b×e. Et toûjours de même quelque nombre de Poulies mobiles qu'on puiffe ici fuppofer. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

PART. II. En ce cas d'équilibre l'on aura encore (*Lem.* 3. *part.* 1.) V.R :: MG. MF. Et de plus (*Th.* 14.

part. 3.) R. X :: L*a*. *aa*. Donc (en multipliant) V. X :: MG×L*a*. MF×*aa*. Et (en composant) V+X. X :: MG×L*a*+MF×*aa*. MF×*aa*. Mais on vient de voir X. R :: *aa*. L*a*. Donc (en multipliant) V+X. R :: MG×L*a*+MF×*aa*. MF×L*a*. Or (*Th.* 14. *part.* 3.) R. Y :: K*b*. *bb*. Donc (en multipliant) V+X. Y :: MG×L*a*×K*b*+MF×K*b*×*aa*. MF×L*a*×*bb*. Et (en composant) V+X+Y. Y :: MG×L*a*×K*b*+MF×K*b*×*aa*+MF×L*a*×*bb*. MF×L*a*×*bb*. Mais on vient de voir Y. R :: *bb*. K*b*. Donc (en multipliant par ordre) V+X+Y. R :: MG×L*a*×K*b*+MF×K*b*×*aa*+MF×L*a*×*bb*. MF×L*a*×K*b*. Or (*Th.* 14. *part.* 3.) R. Z : H*e*. *ee*. Donc (en multipliant) V+X+Y. Z :: MG×L*a*×K*b*×H*e*+MF×K*b*×H*e*×*aa*+MF×L*a*×H*e*×*bb*. MF×L*a*×K*b*×*ee*. Et (en composant) V+X+Y+Z. Z :: MG×L*a*×K*b*×H*e*+MF×K*b*×H*e*×*aa*+MF×L*a*×H*e*×*bb*+MF×L*a*×K*b*×*ee*. MF×L*a*×K*b*×*ee*. Mais on vient de voir Z. R :: *ee*. H*e*. Donc (en multipliant encore par ordre) V+X+Y+Z. R :: MG×L*a*×K*b*×H*e*+MF×K*b*×H*e*×*aa*+MF×L*a*×H*e*×*bb*+MF×L*a*×K*b*×*ee*. MF×L*a*×K*b*×H*e*. Or (*Hyp.*) D=V+X+Y+Z. Donc D. R :: MG×L*a*×K*b*×H*e*+MF×K*b*×H*e*×*aa*+MF×L*a*×H*e*×*bb*+MF×L*a*×K*b*×*ee*. MF×L*a*×K*b*×H*e*. Et toûjours de même encore, quelque nombre de Poulies mobiles qu'on puisse ici supposer. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

COROLLAIRE I.

Il suit de la part. 1. que si tous les cordons touchans des Poulies mobiles L, K, H, &c. étoient paralleles entre-eux ; & consequemment (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) à la direction CD du poids D ; ce parallelisme rendant alors A=2*a*, B=2*b*, E=2*e*, comme dans le Corol. 1. du Th. 17. l'on auroit ici (en substituant ces valeurs de A, B, E, dans la derniere analogie de la démonstration de cette part. 1.) D. R :: F×*a*×*b*×*e*+2G×*a*×*b*×*e*+2G×*b*×*a*×*e*+2G×*e*×*a*×*b*. G×*a*×*b*×*e* :: F+6G. G. De sorte que si les Poulies, tant fixes que mobiles, étoient de diamétres tels, dans la Fig.

128. placées de maniere dans la Fig. 127. que le cordon MR fut aussi pour lors parallele à la direction CD du poids D, & qu'il le pût être dans la Fig. 128. alors l'angle MFG se trouvant ainsi droit & égal à MGF, & consequemment ayant alors son sinus F égal au total G, donneroit D. R :: 7G. G :: 7. 1. c'est-à-dire, que le poids D ainsi en équilibre avec la puissance R par le moyen de deux Moufles, & d'une corde attachée à la Moufle mobile, seroit alors à cette puissance R, comme le double du nombre des Poulies mobiles, augmenté de l'unité, c'est-à-dire, comme ce double plus l'unité seroit à l'unité; au lieu que dans ce cas de parallelisme ce poids seroit seulement à cette puissance (*Th.* 17. *Corol.* 1. 2.) comme le double du nombre des Poulies mobiles seroit à l'unité, si la corde étoit attachée à la Moufle superieure, ou à quelque point fixe.

COROLLAIRE II.

La même chose suit aussi de la part. 2. Car ce cas de parallelisme des cordons touchans des Poulies mobiles L, K, H, rendant $aa = 2La$, $bb = 2Kb$, $ee = 2He$, comme dans le Corol. 2. du Th. 17. la substitution de ces valeurs des soutendantes aa, bb, ee, dans la derniere analogie de la démonstration de cette part. 2. donneroit ici D. R :: $MG \times La \times Kb \times He + 2MF \times La \times Kb \times He + 2MF \times La \times Kb \times He + 2MF \times La \times Kb \times He . MF \times La \times Kb \times He :: MG + 6MF . MF$. De sorte que si les Poulies, tant fixes que mobiles, étoient de diamétres tels dans la Fig. 128. & placées de maniere dans la Fig. 127. que le cordon MR fût aussi pour lors parallele à la direction CD du poids D, & qu'il le pût être dans la Fig. 128. alors MF se trouvant ainsi égale à MG, donneroit D. R :: 7MF. MF :: 7. 1. ainsi que dans le précedent Corol. 1.

COROLLAIRE III.

Il suit encore des part. 1. 2. que plus les angles RAO, RBN, RET, &c. compris entre les touchantes des Poulies

mobiles L, K, H, &c. feront grands, auſſi-bien que l'angle FMG, plus la puiſſance R devra être grande (quoiqu'en raiſon differente) par rapport au poids D, pour demeurer en équilibre avec lui comme ci-deſſus. Cela ſe prouvera comme les Corol. 3. 4. du Th. 17. D'où il ſuit, comme dans ces Corol. 3. 4. du Th. 17. que plus au contraire ces angles RAO, RBN, RET, &c. feront petits, plus auſſi la puiſſance R devra être petite pour faire équilibre ici avec le même poids D; & qu'ainſi la moindre qu'elle puiſſe être pour cela, c'eſt lorſque tous ces angles feront infiniment petits, c'eſt-à-dire (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) lorſque les cordons touchans des Poulies feront tous paralleles entr'eux; auquel cas les précedens Corol. 1. 2. font voir que la puiſſance R feroit ici au poids D en équilibre (*Hyp.*) avec elle, comme l'unité feroit au double du nombre des Poulies mobiles, augmenté de cette unité. Donc la moindre que la puiſſance R puiſſe être ici pour faire équilibre avec le même poids D, c'eſt de lui être en cette raiſon, qui dans le cas preſent de trois Poulies mobiles, feroit (*Corol.* 1. 2.) : : 1. 7.

COROLLAIRE IV.

On voit de-là, ſuivant les Corol. 3. 4. du Th. 17. que l'uſage qu'on fait ici des Poulies mobiles, eſt encore plus avantageux que celui qu'on en a fait dans ce Th. 17. c'eſt-à-dire, qu'il eſt plus avantageux d'attacher à la Moufle mobile qu'à la fixe, ou qu'à quelque crochet fixe, le bout de la corde qui doit l'être à l'une ou à l'autre de ces deux Moufles, ou à un crochet fixe, dans l'un & dans l'autre de ces deux uſages des Poulies. Puiſqu'en cas d'équilibre entre la puiſſance R & le poids D ſur ces deux Moufles, ou ſur un ſoûtenu de Poulies fixes, la moindre que la puiſſance R puiſſe être par rapport à ce poids, lorſque le bout de la corde qui embraſſe les Poulies, eſt attaché à la Moufle fixe, ou à un crochet fixe, c'eſt (*Th.* 17. *Corol.* 3. 4.) d'être à ce poids comme l'unité eſt au double du nombre des Poulies mobiles; au lieu que la

moindre des puissances R requises pour faire équilibre avec le même poids D, lorsque ce bout de corde est attaché à la Moufle mobile, ne doit être à ce poids (*Corol.* 3.) que comme l'unité est au double du nombre des Poulies mobiles, augmenté de cette unité.

SCHOLIE.

Il est visible ici, comme dans l'art. 1. du Schol. du Th. 17. que quand la puissance R seroit appliquée en P au cordon PA, qu'elle tirât suivant *a*P de bas en haut de la même force qu'elle tire ici le cordon SR de haut en bas ; le rapport de cette puissance ou force R au poids D en équilibre (*Hyp.*) avec elle, seroit encore le même que ci-dessus. Cela se prouvera encore comme dans cet art. 1. du Schol. du Th. 17.

On prouvera aussi de même ici que dans l'art. 2. de ce Schol. du Th. 17. qu'un homme peut s'élever soi-même & seul, par exemple, jusqu'à la voute d'une Eglise par le moyen de deux Moufles, au mobile desquelles la corde qui embrasse les Poulies, soit attachée comme à la Moufle fixe; & le précedent Cor. 4. fait voir qu'il sera plus avantageux de s'en servir de la premiere maniere supposée dans le present Th. 18. que de la seconde supposée dans le Th. 17. c'est-à-dire, (toutes choses d'ailleurs étant égales) qu'un homme qui voudra s'élever ainsi soi-même par le secours de deux Moufles, n'aura pas besoin (*Corol.* 4.) d'y employer tant de force, lorsque la corde qui embrasse les Poulies, sera attachée à la Moufle mobile, que lorsqu'elle le sera à la Moufle fixe.

Outre la méprise remarquée dans la réflexion qui suit le Corol. 17. *du Th.* 14. *par rapport aux Poulies mobiles separées, les Corol.* 1. 2. 3. 4. *des précedens Th.* 17. 18. *en font voir encore deux autres par rapport aux Poulies jointes plusieurs ensemble en Moufles mobiles, dans lesquelles par inadvertence, sont aussi tombez les Auteurs de la proposition rapportée dans la reflexion qui suit le Corol.* 12. *du Th.* 14. *lesquels lui donnant encore ici un usage trop étendu, ont avan-*

cé sans restriction, que dans l'équilibre d'une puissance avec un poids suspendu à une Moufle mobile armée de plusieurs Poulies.

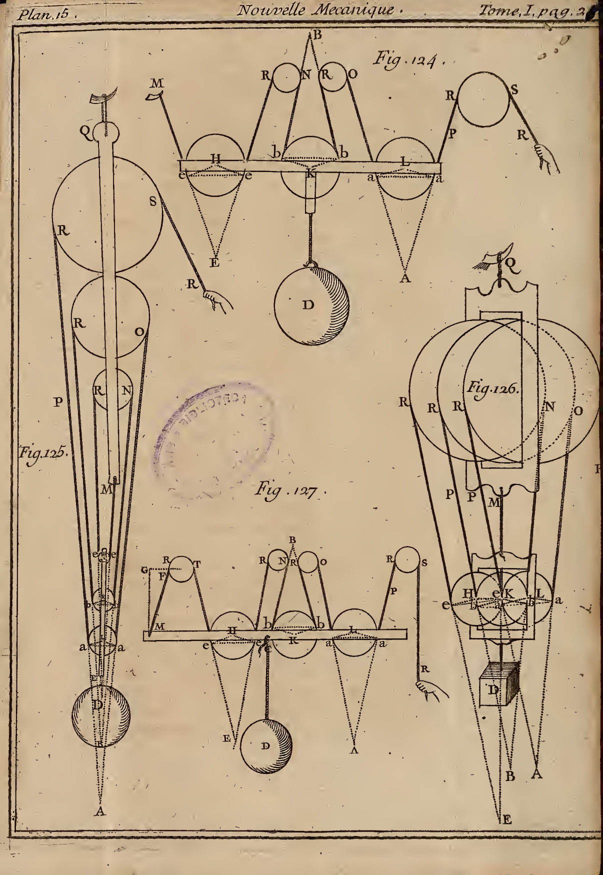
1°. *Si la corde qui les embrasse est attachée par un bout à une autre Moufle fixe, ou à un crochet pareillement fixe;* cette puissance est à ce poids, comme l'unité est au double du nombre des Poulies de centres mobiles. *Ce qui sur une infinité de cas n'est vrai que dans celui où les cordons touchans des Poulies sont tous paralleles entr'eux, & est faux dans tous les autres, ainsi que les Corol. 1. 2. 3. 4. du Th. 17. le font voir.*

2°. *Si la corde qui embrasse les Poulies est attachée à la Moufle mobile;* la puissance est au poids, comme l'unité est à elle-même augmentée du double du nombre des Poulies mobiles. *Ce qui sur une infinité de cas ne pourroit encore être vrai que dans celui où les cordons touchans des Poulies seroient tous paralleles entr'eux, & seroit faux dans tous les autres, ainsi que les Corol. 1. 2. 3. 4. du précedent Th. 18. le font pareillement voir.*

REMARQUE

Sur les précedentes Sections 2. 3. touchant l'usage de ce qui y est contenu.

La précedente réflexion jointe à celles qui suivent les Corol. 12. & 17. du Th. 14. fait voir combien on est loin de son compte, quand dans l'usage des Poulies on calcule le rapport de la puissance au poids, comme si les cordons touchans de ces Poulies étoient toûjours paralleles entre-eux; & qu'on doit avoir autant d'égard aux angles que ces cordons font entr'eux, que si prolongez ils étoient autant de branches de corde, noüées à celle du poids aux points où ils en rencontrent la direction, ainsi que dans les Fig. 75. 76. & que ce poids ne fût ici comme là, que soûtenu avec des cordes seules & sans Poulies. Par exemple, qu'il faut avoir autant d'égard à l'angle PAR que font entr'eux les cordons ou parties prolongées PM, RN, de


Fig. 124.
Fig. 125.
Fig. 126.
Fig. 127.

de la corde PMNR, avec laquelle les puissances P, R, soûtiennent le poids D par le moyen de la Poulie mobile MON dans la Fig. 130. que si ces puissances le soûtenoient sans aucune Poulie avec les seules cordes PA, RA. nouées en A avec celle AD de ce poids D, ainsi que dans la Fig. 131. FIG. 130. 131.

II. Presentement pour avoir ces angles, par exemple, l'angle PAR dans la Fig. 130. dans laquelle les prolongemens MA, NA, des cordons PM, RN, n'étant qu'imaginez, cet angle PAR ou MAN, n'est pas visible ; il n'y a qu'à appliquer à un de ces cordons, par exemple, à RN le côté BC d'un quart de cercle gradué BCD, au centre B, duquel pende un petit poids H, au bout d'un fil de soye BH ; prendre garde, lorsque ce poids H sera en repos, par quel point F de ce quart de cercle ce fil passera : l'on aura pour lors l'angle CBF ou ABH égal au nombre des degrez compris dans l'arc CF ; & consequemment aussi l'angle RAL, puisque les directions LD. BH, paralleles (*Hyp.*) entr'elles, rendent les angles alternes LAB, HBA, égaux entr'eux. Cet angle RAL étant ainsi trouvé, l'on aura consequemment aussi l'angle PAL, qui lui est égal, puisque RA, PA, sont tangentes de la Poulie MON, dont L est le centre. Donc l'on aura aussi l'angle total PAR fait de ces deux-là, & double de chacun d'eux. Par consequent le poids D étant ici (*Th.* 14. *part.* 2.) à chacune des puissances P, R, en équilibre (*Hyp.*) avec lui, dans la raison du sinus de l'angle total PAR au sinus de sa moitié ; l'on aura par ce moyen en nombres requis dans la pratique, le rapport de ce poids à chacune de ces puissances, & consequemment aussi un des trois étant donné, chacun des deux autres sera pareillement connu. FIG. 130.

Si l'on veut ce rapport sans sinus, il n'y a qu'à mener les rayons LM, LN, aux points d'attouchement M, N, avec la soutendante MN de l'arc de la Poulie, embrassé par la corde PMNR ; & la part. 3. du Th. 14. donnera ce rapport du poids D à chacune des puissances P, R, en

raison de cette soutendante MN à chacun des rayons LM, LN, de la Poulie. Mais parce que pour connoître cette soutendante MN, il faut avoir recours aux sinus des angles trouvez ci-dessus, le plus court & le plus commode dans la pratique est de s'en tenir tout d'un coup à ces sinus, ainsi qu'on l'a déja dit dans la Remarque qui est dans le Scholie du Th. 14.

Fig. 131. III. Quant aux poids soûtenus seulement avec des cordes, comme dans la Fig. 131. l'on aura, de même que dans le précedent art. 2. les angles RAL, PAL, dont le côté AL est sur la direction DA prolongée du poids D, & consequemment aussi les angles PAR, PAD, RAD, que les cordes font entr'elles, en appliquant successivement le côté BC du quart de cercle gradué de l'art. 2. sur chacun des cordons AR, AP, des puissances P, R, en équilibre (*Hyp.*) avec le poids D; & en prenant garde, comme dans cet art. 2. sur quel degré F, E, s'arrêtera le fil BH du poids H dans chacune de ces deux positions : les angles CBF, CBE, alors connus, donneront leurs alternes RAL, PAL, par le moyen desquels les trois angles précedens PAR, PAD, RAD, seront aussi connus avec leurs sinus que la table des sinus donnera en nombres. Donc le poids D étant ici (*Th.* 1. *Corol.* 4. *ou Th.* 2. *Corol.* 7.) à chacune des puissances P, R, en équilibre (*Hyp.*) avec lui, dans la raison du sinus de l'angle PAR au sinus de chacun des angles RAD, PAD; l'on aura aussi pour lors en nombres le rapport de ce poids à chacune de ces deux puissances : de sorte que ce poids étant donné, on connoîtra pour lors chacune d'elles; ou une d'elles étant donnée, on connoîtra aussi l'autre avec ce poids.

Quelque nombre de branches qu'ait la corde avec laquelle un poids est soûtenu par tant de puissances qu'on voudra, & de quelque nombre de nœuds que les branches partent, les angles qu'elles feront chacune avec celle qui en sera comme la tige, se trouveront comme ci-dessus par le moyen du quart de cercle CBD, dont on

vient de se servir, en commençant par le nœud où pend immédiatement le poids, c'est-à-dire, par le nœud qui en est le plus voisin : En operant (dis-je) comme ci-dessus, on aura tous les angles que les branches de ce nœud feront chacune avec le fil BH du plomb H de l'instrument CBD, & consequemment chacun des angles que chacune de ces branches fera avec la direction du poids qu'elles soûtiennent, supposée parallele à celle du plomb H, ou de son fil BH. Cet instrument appliqué ensuite de même sur chacune des branches dans lesquelles chacune de ces premieres se subdivise, donnant encore de même l'angle que chacune de ces secondes branches fera avec son fil BH, donnera consequemment l'angle que chacune d'elles fera avec celle des premieres dont elle sera la branche, & dont cet instrument aura déja donné l'angle avec la direction du poids en question. Ce même instrument donnera pareillement les angles que ces secondes branches feront chacune avec chacune de celles dans lesquelles elles se subdiviseront encore immédiatement ; & toûjours de même dans quelque nombre de branches que ces troisiémes se subdivisent encore, & quelque loin qu'aillent ces subdivisions de chaque branche. Ce qui étant ainsi connu, les Th. 1. 2. 4. 5. 6. 7. donneront en nombres, par le secours de la Table des sinus, le rapport de chaque poids à chacune des puissances qui le soûtiendront ainsi ensemble avec des cordes seulement, à quelque nombre de branches, & suivant quelques directions qu'elles leur soient appliquées.

IV. Dans les pratiques précedentes (*art.* 2. 3.) il faut bien prendre garde à ce qu'on y a marqué, que pour qu'elles soient justes, la direction BH du fil de l'instrument y doit être parallele à celle du poids soûtenu, soit avec des Poulies, ou avec des cordes seulement, par les puissances dont on cherche les rapports avec lui ; ce qui suppose les directions des poids paralleles entr'elles : supposition cependant fausse à la rigueur ; mais qui sensiblement vraye, ne laisse pas de suffire dans la pratique, où

l'on doit se contenter de l'à peu-près du but, lorsqu'on n'y sçauroit atteindre. Il faut pourtant avouer que pour pouvoir juger si l'on est près ou loin du but, il faut sçavoir où il est. C'est pour cela qu'un Géométre y doit toûjours tendre, jusqu'à ce qu'il l'ait enfin apperçû, afin que le voyant il puisse ensuite dans la pratique en approcher le plus près qu'il lui sera possible, & rendre ainsi par le secours de la théorie, la pratique la moins fautive qu'elle puisse être: elle l'est toûjours necessairement quelque peu, faute d'assez d'adresse, & de sens assez fins dans la construction & dans l'usage des Instrumens qu'on y employe; mais elle l'est bien davantage, quand à ce défaut est joint celui de ne pas voir précisément où l'on tend. Cela soit dit en passant pour desabuser ceux qui effrayez des difficultez de la théorie inventrice & directrice de la pratique, & qui pour dédommager leur vanité de l'ignorance qu'ils en ont, ne se piquent que de pratiques, par lesquelles ils croyent pouvoir arriver à des à peu-près qu'ils ne voyent pas: semblables en cela à des aveugles qui voudroient jouer à la boule, sans sçavoir même de quel côté est le but.

Pour le voir ici dans le cas des directions des poids non paralleles entr'elles, la théorie d'un Géométre le conduira à la connoissance des angles compris tant entre ces directions, qu'entr'elles & celles des puissances qui soûtiennent ces poids, les distances du point de concours des directions de ces poids, à leurs points de suspension, & de leurs points de suspension entr'eux étant données; & de-là par les Théoremes précedens, à la connoissance du rapport cherché de chacun de ces poids à chacune des puissances qui les soûtiennent avec des Poulies; ou avec
FIG. 132. des cordes seulement. Par exemple, le poids D étant encore ici soûtenu par les puissances P, R, avec des cordes seulement, comme dans le précedent art. 3. si l'on suppose que les directions de ce poids suspendu en A, & du poids H suspendu en B au centre du quart de cercle BCD appliqué comme dans cet art. 3. au cordon AP, concou-

rent en quelque point T, qui soit (si l'on veut) le centre de la Terre; les distances AT, AB, étant données, l'angle CBE ou ABT que le filet BH en repos, fera pour lors connoître sur l'instrument, donnera par la Trigonométrie les autres angles BTA, BAT, du triangle ABT, & consequemment aussi l'angle PAL, complement (à deux droits) de BAT: on trouvera de même les angles RAT, RAL; & de-là aussi l'angle PAR=PAL+RAL. Si les trois distances AT, AB, BT, étoient données, la Trigonométrie donneroit encore presque de même les angles PAR, PAT, RAT, sans le secours d'aucun instrument; & ces trois angles étant ainsi connus, le Corol. 4. du Th. 1. ou le Corol. 7. du Th. 2. donneroit enfin le rapport cherché du poids D à chacune des puissances P, R, qui le soûtiennent (*Hyp.*) avec des cordes seulement. Ce rapport se trouveroit de même, si ces puissances P, R, soûtenoient ce poids D avec la Poulie MON de la Fig. 130. dans ce cas des directions des poids, concourantes en quelque point que ce fût, dont les distances aux points de suspension de ces poids, & celles de ces points entr'eux, fussent données.

Il est vrai que la distance AT au centre T de la Terre seroit ici énorme par rapport à AB, & la distance BT si peu differente de AT, que les yeux n'y verroient que comme si ces distances AT, BT, étoient paralleles entr'elles; & qu'ainsi dans la pratique il faudroit s'en tenir ici à celle des précedens art. 2. 3. Mais du moins un Géométre seroit-il content de l'avoir conduite (*art.* 2. 3.) aussi près du but qu'elle peut aller, & de voir comment il l'y meneroit juste, si l'instrument & ses yeux répondoient à sa théorie. Outre ce contentement il auroit encore celui de voir que cette maniere de chercher ici les rapports du poids aux puissances qui le soûtiennent, toute impraticable que la rend le trop grand éloignement du point de concours des directions des poids entr'elles, ne laisse pas d'avoir son utilité dans tous les cas où les angles de ces directions entr'elles sont sensibles. Par exemple, si au lieu

du poids D, c'étoit une puiſſance ♪, qui fût en équilibre (comme lui) avec les deux puiſſances P, R, ; & qui, au lieu de tendre au centre T de la Terre comme lui, & le poids H, eût ſa direction A♪ vers tout autre point ♪ tel qu'elle rencontrât la direction prolongée BT du plomb H en quelque point X aſſez voiſin pour cauſer une égalité ou une difference ſenſible & reconnoiſſable entre AX, BX : la pratique précedente devient alors utile & même neceſſaire en ce cas des directions concourantes du plomb H & de la puiſſance ♪. Cette pratique donnant donc en ce cas de concours en X, les angles PA♪, RA♪, avec leurs complemens PAλ, RAλ, comme elle auroit donné ci-deſſus les angles PAT, RAT, avec leurs complemens PAL, RAL, dans le cas du concours en T des directions des poids D, H, ſi le trop grand éloignement de ce point n'en eût empêché l'uſage ; elle donnera ici les angles PAR, PA♪, RA♪, comme elle auroit donné là PAR, RAD, PAD. Par conſequent, ſuivant cette même pratique, le Corol. 4. du Th. 1. ou le Corol. 7. du Th. 2. donnera ici les rapports des puiſſances ♪, P, R, entr'elles, comme il auroit donné là le rapport du poids D à chacune des puiſſances P, R. Tout cela s'appliquera de même aux puiſſances en équilibre entr'elles ſur des Poulies, l'étant alors (ſuivant tout ce qui précede) comme ſi elles y étoient avec des cordes ſeulement. Tout cela eſt preſentement trop clair pour s'y arrêter davantage.



128.

129.

130.

131.

132.

SECTION IV.

Du Tour, & des autres Machines qui y ont rapport.

DEFINITION XX.

LE *Tour* eſt une Machine faite d'une Roue ou d'un Tambour fermement aſſemblé avec un Cylindre ou Rouleau, qui l'enfile par le milieu ſuivant ſon axe, lequel devient auſſi pour lors celui de ce Cylindre. FIG. 133.

Cette Machine ſert à élever ou à tirer des fardeaux P attachez au bout d'une corde qu'une puiſſance R, appliquée à la circonference du Tambour BB, fait filer ou entortiller autour du Cylindre CC, en faiſant tourner la Machine entiere (comme d'une piece) autour de ſon axe EF appuyé par ſes extrêmitez E, F, dans les trous ou ſur les fentes de deux appuis fermes GH, GH. Les Latins appellent cette Machine *Axis in peritrochio*; nom emprunté du Grec; *Axis*, c'eſt le Cylindre ou Rouleau CC, & *Peritrochium*, c'eſt le Tambour ou la Roue BB.

Pour avoir plus aiſément priſe ſur ce Tambour, on implante dans des trous faits à ſa circonference, des bâtons ou bras BD, que Pappus (*liv.* 8.) appelle *Scytalæ*.

Fort ſouvent on ſe contente d'implanter ces bâtons ou bras dans le Cylindre même ſans Tambour, perpendiculairement à ſon axe, comme l'on voit dans la Fig. 134. lorſque ce Cylindre ou Rouleau eſt horiſontal, cette Machine s'appelle ordinairement *Treüil* ou *Singe*; & lorſqu'il eſt vertical, elle s'appelle *Vindas*, *Cabeſtan*, *Virevau*, *Guindeau*, ou *Guindas*. Vitruve l'appelle *Sucula* dans la premiere ſituation; & *Ergata* dans la ſeconde. FIG. 134.

Les Tarieres, les Roues ou Rouleaux à Manivelles, les Roues des Moulins, les Roues dentées avec Rouleaux ou Pignons, les Crics réſultans du mutuel engrenement des Roues

dentées dans des Pignons, les Grues, &c. se rapportent à cette Machine, c'est-à-dire, au Tour, *au* Treüil, *ou au* Vindas. *Voici presentement le rapport des forces qu'il y faut employer.*

THEOREME XIX.

Fondamental de la presente Section 4.

Fig. 135. & suivantes jusqu'à 142. *Soit le tambour BB de la Fig.* 133. *exprimé ici en profil dans les Fig.* 135. 136. 137. 138. *par la roue ou le cercle BBNB; son cylindre ou rouleau CC, par le cercle CMC concentrique à celui-là; & son axe EF avec ses poles E, F, par le centre A de ces deux cercles: & de même du cylindre & de l'axe du Treüil ou Vindas de la Fig.* 134. *dans les Fig.* 139. 140. 141. 142. *Cela supposé, soient deux puissances quelconques P, R, appliquées à chacune de ces Machines des Fig.* 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. *suivant telles directions MP, NR, qu'on voudra, posées dans des plans perpendiculaires à l'axe de la Machine.*

I. *Ces deux puissances P, R, agiront ensemble sur cette Machine, comme si elles étoient dirigées suivant un même plan perpendiculaire à l'axe de cette même Machine.*

II. *S'il y a équilibre entre ces deux puissances P, R, ainsi regardées comme dans un même plan CMC perpendiculaire à l'axe de la Machine; quelqu'angle PER que leurs directions MP, RN, fassent entr'elles, la direction EF de la force résultante* (princ. gener. & Lem. 3.) *de leur concours, passera toûjours par l'axe immobile de la Machine, ou par le centre fixe A du cercle CMC, qui represente cet axe fixe.*

III. *En ce cas d'équilibre, si de cette direction EA prolongée on imagine dans l'angle GEH compris entre les directions MP, NR, pareillement prolongées des puissances P, R, une partie quelconque EF depuis le sommet E de cet angle, sur laquelle (comme diagonale) soit un parallelogramme GH, qui ait ses côtez EG, EH, sur ces directions MP, NR, prolongées des puissances P, R; la charge de l'axe ou centre fixe A de la Machine, sera toûjours dirigée suivant cette diagonale EF, & à chacune de ces puissances P, R, comme cette diagonale*

nale EF à chacun de ces côtez EG, EH, qui leur répondent sur leurs directions.

IV. *Reciproquement si la direction EF de la force résultante du concours des puissances P, R, passe par l'axe ou centre fixe A de la Machine, il y aura équilibre entre ces puissances; & la charge de cet appui A résultante de leur concours, sera pour lors dirigée suivant EF, & à chacune de ces deux puissances dans la précedente raison* (part. 3.) *de la diagonale EF du parallelogramme GH à chacun de ses côtez EG, EH, qui leur répondent sur leurs directions.*

V. *Pareillement si la diagonale EF prolongée du parallelogramme GH passe par l'appui A, & que les puissances P, R, soient entr'elles comme les côtez EG, EH, de ce parallelogramme, pris sur leurs directions; ces deux puissances demeureront en équilibre entr'elles sur cet appui A, & la charge de cet appui, résultante de leur concours, sera encore pour lors dirigée suivant EF, & à chacune de ces deux puissances P, R, comme la diagonale EF à chacun des côtez EG, EH, qui leur répondent dans ce parallelogramme GH.*

DEMONSTRATION.

PART. I. A quelque point de la surface du rouleau exprimé ici par le cercle CMC, que le poids ou la puissance P soit appliquée perpendiculairement à l'axe de ce rouleau, il est manifeste, suivant l'ax. 2. que cette puissance P y doit agir sur ce rouleau pour le faire tourner autour de son axe, comme elle feroit ici en M, si elle y étoit appliquée dans le plan de ce cercle CMC, suivant une direction MP parallele à celle qu'elle auroit-là. Donc la puissance R étant aussi (*Hyp.*) suivant une direction RN posée dans ce même plan CMC, ces deux puissances P, R, doivent ici agir ensemble sur la Machine comme si elles y étoient dirigées toutes deux suivant ce même plan CMC perpendiculaire (*Hyp.*) à l'axe de cette Machine. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

PART. II. Le principe general, & le nomb. 1. du Corol. 1. du Lem. 3. font voir que du concours des puissances

P, R, il doit résulter sur la Machine ici supposée, une troisiéme force suivant quelque ligne EF qui passe par le concours E, & dans l'angle GEH des directions de ces deux puissances, suivant laquelle ligne EF, cette Machine doit être ici poussée ou tirée, comme si, au lieu de l'être par ces deux puissances P, R, elle ne l'étoit que par une seule force égale à la résultante ici de leur concours; & que cette Machine ainsi poussée ou tirée suivant cette ligne EF, se meuvroit effectivement suivant cette direction, si rien ne s'y opposoit. Donc n'y ayant ici (*Hyp.*) d'obstacle qu'en A, cette direction EF de la force résultante du concours des puissances P, R, doit effectivement passer par cet obstacle A dans le cas d'équilibre ici supposé. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PART. III. L'art. 2. du Corol. 1. du Lem. 3. fait voir que cette force suivant EF, résultante du concours des puissances P, R, doit ici être à chacune de ces puissances, comme la diagonale EF du parallelogramme GH est à chacun de ses côtez EG, EH, qui leur répondent sur leurs directions. Mais dans le cas d'équilibre ici supposé, la résistance de l'appui A, opposée (*part.* 2.) à cette force suivant EF, & en équilibre (*Hyp.*) avec elle, lui est égale par l'ax. 4. & par l'art. 3. du Corol. 2. du Lem. 3. Donc en ce cas d'équilibre cette résistance de l'appui A, ou la charge de cet appui, c'est-à-dire, ce qu'il reçoit ici d'impression du concours des puissances P, R, suivant EF, doit aussi toûjours être dirigée suivant EF, & être à chacune de ces deux puissances P, R, comme la diagonale EF du parallelogramme GH est à chacun de ses côtez EG, EH, qui leur répondent sur leurs directions. *Ce qu'il falloit 3°. démontrer.*

PART. IV. En supposant presentement, comme l'on fait ici, que la direction EF de la force résultante du concours des puissances P, R, passe par l'axe ou par le centre fixe A de la Machine supposée, le Corol. 1. du principe general fait voir que la résistance (*Hyp.*) invincible de cet appui A, doit l'arrêter tout court, & mettre ainsi ces

deux puiſſances P, R, en équilibre entr'elles ſur cet appui; & conſequemment (*part.* 3.) ne conſiſtant que dans l'impreſſion ſuivant EF réſultante (*Hyp.*) ſur lui du concours des puiſſances P, R, doit auſſi pour lors être dirigée ſuivant EF, & être à chacune de ces puiſſances comme la diagonale EF du parallelogramme GH eſt à chacun de ſes côtez EG, EH, qui leur répondent ſur leurs directions. *Ce qu'il falloit* 4°. *démontrer.*

PART. V. Puiſque (*Hyp.*) les puiſſances P, R, ſont ici entr'elles comme les côtez EG, EH, du parallelogramme GH, qui leur répondent ſur leurs directions, l'art. 1. du Corol. 1. du Lem. 3. fait voir que l'impreſſion réſultante de leur concours ſur la Machine, doit ſe faire de E vers F ſuivant la diagonale EF de ce parallelogramme. Donc cette ligne EF prolongée paſſant (*Hyp.*) par l'appui A, toute la force réſultante du concours de ces deux puiſſances P, R, paſſera auſſi par cet appui A. Par conſequent (*part.* 4.) elles ſeront en équilibre entr'elles ſur cet axe ou appui A, alors chargé de toute cette force ou impreſſion commune ſuivant EF, & cette charge ſera (*part.* 3.) non ſeulement ainſi dirigée ſuivant EF, mais encore à chacune de ces deux puiſſances P, R, comme la diagonale EF à chacun des côtez correſpondans EG, EH, du parallelogramme GH. *Ce qu'il falloit* 5°. *démontrer.*

COROLLAIRE I.

En cas d'équilibre, la part. 3. donnant ici le poids ou la puiſſance P à la charge de l'appui A : : EG. EF. Et cette charge à la puiſſance R : : EF. EH. l'on aura ici (en raiſon ordonnée) P. R : : EG. EH. c'eſt-à-dire, les puiſſances P, R, entr'elles en raiſon des côtez EG, EH, qui leur répondent ſur leurs directions dans le parallelogramme GH. Par conſequent ſi d'un point quelconque A de ſa diagonale EF prolongée, on mene AM, AN, perpendiculaires ſur les directions MP, NR, pareillement prolongées de ces deux puiſſances P, R, ces mêmes puiſſances ſeront entr'elles (*Lem.* 8.) en raiſon reciproque de

ces perpendiculaires, c'eſt-à-dire, P. R :: AN, AM. Ce qui dans les Fig. 135. 136. 137. 138. ſignifie qu'en ce cas d'équilibre le poids ou la puiſſance P y eſt toûjours à la puiſſance R, comme le rayon AN de la roue ou du tambour BNB, à la circonference duquel cette ſeconde puiſſance R eſt appliquée, eſt au rayon AM du cylindre ou du rouleau CMC, à la circonference duquel l'autre puiſſance P eſt pareillement appliquée ; c'eſt-à-dire, que ces deux puiſſances P, R, en équilibre (*Hyp.*) entr'elles, y ſont alors entr'elles en raiſon reciproque des rayons ou des diamétres du rouleau & de la roue, aux circonferences deſquelles ces deux puiſſances ſont appliquées.

COROLLAIRE II.

Mais en prenant EA dans ces quatre Fig. 135. 136. 137. 138. & dans les quatre autres Fig. 139. 140. 141. 142. c'eſt-à-dire, dans toutes celles de ce Théoreme-ci, pour le ſinus total : On ſçait (*Déf. 9. Corol. 1.*) que les perpendiculaires AM, AN, ſont les ſinus des angles AEM, AEN. Donc auſſi (*Corol. 1.*) les puiſſances P, R, ſuppoſées en équilibre, ſont par tout ici entr'elles en raiſon reciproque des ſinus des angles AEM, AEN, que leurs directions MP, NR, prolongées y font avec celle EA de la charge de l'axe de la Machine, ou de l'appui A, qui exprime cet axe ; c'eſt-à-dire, le poids ou la puiſſance P à la puiſſance R, comme le ſinus de l'angle AEN eſt au ſinus de l'angle AEM.

COROLLAIRE III.

Cela ſe voit encore en ce que la charge de l'appui A étant en ce cas d'équilibre (*part. 3.*) à chacune des puiſſances P, R, comme la diagonale EF du parallelogramme GH eſt à chacun de ſes côtez EG, EH, qui leur répondent ſur leurs directions, c'eſt-à-dire (en appellant cette charge A) A, P, R, en raiſon des trois grandeurs EF, EG, EH, ou (à cauſe de EH=GF) en raiſon des trois côtez EF, EG, GF, du triangle EGF, ou (*Lem. 8.*

Corol. 2.) en raiſon des ſinus de ſes angles EGF, EFG, FEG, oppoſez à ces mêmes côtez, ou bien auſſi en raiſon des ſinus des angles MEN, AEN, AEM, égaux à ceux-là, ou leurs complemens à deux droits. Ce qui donne, dis-je, encore en ce cas d'équilibre,

1°. Le poids ou la puiſſance P à la puiſſance R, en raiſon du ſinus de l'angle AEN au ſinus de AEM, ainſi que dans le Corol. 2.

2°. Et conſequemment (*Déf.* 9. *Corol.* 1.) ce poids ou cette puiſſance P à la puiſſance R, en raiſon de AN à AM, ainſi que dans le Corol. 1.

COROLLAIRE IV.

Cette raiſon de AN à AM, qui peut varier dans le Treüil ou le Vindas des Fig. 139. 140. 141. 142. ſelon la difference des angles que la direction RN de la puiſſance R, y peut faire avec le bras AD ou CD de cette Machine, auquel elle eſt appliquée, & ſelon les differentes diſtances AR de l'axe ou appui A de cette même Machine au point R d'application de cette puiſſance R à ce bras AD; le rapport des puiſſances P, R, requis (*Corol.* 1. *&* 3. *nomb.* 2.) de AN à AM pour y faire équilibre entr'elles, y peut varier auſſi, & conſequemment differentes puiſſances R differemment appliquées à cette Machine, y peuvent faire équilibre ſucceſſivement avec le même poids P. Fig. 139. 140. 141. 142.

Mais dans le Tour qu'expriment les Fig. 135. 136. 137. 138. le rapport de AN à AM, n'y pouvant non plus changer que ces rayons de la roue & du rouleau de cette Machine tant qu'elle demeure la même, quelques ſoient d'ailleurs les directions des puiſſances P, R, qui y ſont ou ſeront appliquées : le rapport de ces puiſſances P, R, requis (*Cor.* 1. *&* 3. *nomb.* 2.) pour y faire équilibre entr'elles, n'y peut jamais varier ni changer, quelque changement qu'il arrive à leurs directions; & conſequemment le même poids P appliqué au rouleau de cette Machine, n'y peut jamais être ſoutenu en équilibre que par une Fig. 135. 136. 137. 138.

même puissance R appliquée à la roue de cette même Machine, quelques directions qu'on donne à ces deux puissances P, R.

COROLLAIRE. V.

FIG. 139. 140. 141. 142. Les bras CD du Treüil ou du Vindas des Fig. 139. 140. 141. 142. étant (*Hyp.*) perpendiculaires à l'axe de son rouleau, ou à la circonference CMC, qui represente ce rouleau, en sorte que prolongez ils passeroient tous par le centre A de ce cercle, lequel centre A exprime ici l'axe de ce rouleau; si la puissance R tire ou pousse perpendiculairement celui de ces bras auquel elle est appliquée, c'est-à-dire, si elle lui est appliquée suivant une direction ER qui lui soit perpendiculaire & dans le plan du cercle CMC; alors AN perpendiculaire (*Hyp.*) à cette direction ER, tombant sur AR, & se confondant alors avec ce bras de Treüil ou de Vindas, le Corol. 1. & le nomb. 2. du Corol. 3. font voir qu'en cas d'équilibre, le poids ou la puissance P sera pour lors à la puissance R, comme la longueur du bras AR sera au rayon AM du rouleau de cette Machine.

COROLLAIRE VI.

FIG. 135. & suivantes jusqu'à 142. Il suit aussi de la part. 5. pour tous les cas du Tour & du Treüil ou du Vindas, que si les puissances P, R, y sont entr'elles en raison reciproque des lignes AM, AN, menées de l'appui A perpendiculairement sur les directions MP, NR, de ces puissances, c'est-à-dire, si P. R :: AN. AM. il y aura équilibre entre ces mêmes puissances P, R. Car si l'on imagine un parallelogramme GH d'une diagonale quelconque EF prise sur la droite EA depuis le point de concours E des directions de ces deux puissances dans l'angle GEH que ces directions font entr'elles, lequel soit consequemment aussi un angle de ce parallelogramme GH. Le Lemme 8. donnera pour lors EG. EH :: AN. AM. (*Hyp.*) :: P. R. Donc la diagonale EF prolongée passant ainsi (*constr.*) par l'appui A de la Machine,

les puissances P, R, demeureront par tout ici (*part.* 5.) en équilibre entr'elles.

COROLLAIRE VII.

En prenant ici AE pour le sinus total, le Corol. de la Déf. 9. fait voir que les droites AM, AN, y seront les sinus des angles AEM, AEN, que les directions MP, NR, des puissances P, R, y feront avec cette droite AE. Donc (*Corol.* 6.) lorsque ces deux puissances P, R, seront entr'elles en raison reciproque des sinus des angles compris entre chacune de leurs directions, & la droite menée de l'appui A de la Machine au concours E de ces directions entr'elles ; ces mêmes puissances P, R, demeureront encore en équilibre sur cet axe ou appui A.

COROLLAIRE VIII.

Il suit pareillement de chacune des part. 4. 5. que si la charge de l'axe ou appui A, tant du Tour que du Treüil ou du Vindas, résultante du concours des puissances P, R, qui y sont appliquées, est à chacune de ces deux puissances, comme le sinus de l'angle MEN compris entre leurs directions prolongées MP, NR, est au sinus de chacun des angles reciproquement pris AEM, AEN, que chacune de ces directions fait avec la droite EA menée de leur concours E à cet appui A ; ces deux puissances P, R, demeureront en équilibre entr'elles sur cet appui A. Car si l'on imagine encore le parallelogramme GH fait comme dans le Corol. 6. l'on verra pour lors les sinus des angles EGF, FEG, EFG, du triangle EGF être les mêmes que ceux des angles MEN, AEM, AEN ; & consequemment (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) le premier de ces sinus ci-être à chacun des deux autres, comme le côté EF de ce triangle EGF est à chacun de ses deux autres côtez GF, EG, c'est-à-dire (à cause de EH=GF) comme la diagonale EF du parallelogramme GH est à chacun de ses côtez EH, EG. Mais on suppose ici la charge de l'axe ou de l'appui A, résultante du concours des puissances P, R,

être à chacune de ces puissances, comme le sinus de l'angle MEN est à chacun des sinus des angles AEN, AEM. Donc aussi la charge supposée de l'appui A, est ici à chacune de ces puissances P, R, comme la diagonale EF du parallelogramme GH est à chacun de ses côtez EG, EH, qui leur répondent sur leurs directions. Par consequent ces deux puissances P, R, seront ici entr'elles comme ces mêmes côtez EG, EH; & (*princ. gener. Cor.* 2.) la force résultante de leur concours sera non seulement égale à cette charge, mais encore dirigée suivant EF qui passe (*Hyp.*) par l'appui A. Donc enfin (*part.* 4. 5.) il y aura ici équilibre entre ces deux puissances P, R, ainsi qu'on le vient d'avancer.

COROLLAIRE IX.

Puisqu'en cas d'équilibre dans toutes les Machines de ce Théoreme-ci, la charge de l'axe ou de l'appui A qui represente cet axe, résultante du concours d'action des puissances P, R, sur lui, est toûjours (*part.* 3.) à chacune de ces puissances P, R, comme la diagonale EF du parallelogramme GH, est à chacun de ses côtez EG, EH, qui leur répondent sur leurs directions: le Lem. 9. fait voir que lorsque l'angle MEN, que font entr'elles les directions MP, NR, de ces deux puissances, est infiniment aigu, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol.* 1.) lorsque ces deux directions sont paralleles entr'elles; cette charge de l'appui A, est toûjours égale à la somme P+R, de ces deux puissances, tant qu'elles agissent en même sens; ou seulement égale à leur difference P—R, tant qu'elles agissent en sens contraires. Les Corol. 1. 2. de ce Lem. 9. font pareillement voir que dans l'un & l'autre de ces deux cas cette charge de l'appui A est toûjours alors dirigée parallelement aux directions de ces deux puissances P, R; sçavoir, vers le même côté qu'elles dans le premier cas, & vers le côté de la plus forte d'entr'elles dans le second. Car,

1°.

1°. Lorſque l'angle MEN eſt infiniment aigu, celui GEH du parallelogramme GH l'eſt auſſi dans les Fig. 136. 138. 139. 140. du premier cas; & conſequemment auſſi (*Lem.* 9. *part.* 1.) la diagonale du parallelogramme GH ſe trouve toûjours égale en ce cas à la ſomme de ces côtez EG, EH. Donc ſuivant la part. 3. de ce Théoreme-ci, la charge de l'appui A; réſultante du concours d'action des puiſſances P, R, ſur cet appui, eſt auſſi toûjours égale à la ſomme P+R de ces deux puiſſances dans ce cas des Fig, 136. 139. 140. 141. qui ſe réduiſent alors aux Fig. 143. 145. dans leſquelles ces deux puiſſances P, R, de directions (*Hyp.*) paralleles entr'elles, agiſſent vers le même côté, où ſont appliqués de differens côtez de l'appui A de la Machine: & cela conformément au Corol. 1. du Lem. 9. lequel Corol. 1. fait voir auſſi que cette charge toûjours dirigée (*part.* 3.) ſuivant la diagonale EF doit l'être alors de E vers A parallelement aux directions P, R, vers le même côté qu'elles, comme dans les Fig. 143. 145. Fig. 136. 138. 139. 140. Fig. 143. 145.

2°. Tant que l'angle MEN compris entre les directions de ces deux puiſſances P, R, demeure infiniment aigu, celui GEH du parallelogramme GH des Fig. 135. 137. 141. 142. de l'autre cas, eſt au contraire (*Déf.* 11. *Corollaire*) infiniment obtus; & conſequemment (*Lem.* 9. *part.* 2.) la diagonale EF du parallelogramme GH eſt pour lors en ce cas égale ſeulement à la difference des côtez EG, EH, de ce parallelogramme. Donc ſuivant la part. 3. de ce Théoreme-ci, la charge de l'appui A, n'eſt alors égale qu'à la difference P—R des puiſſances P, R, en ce cas des Fig. 135. 137. 141. 142. qui ſe réduiſent alors aux Fig. 144. 146. dans leſquelles ces deux puiſſances de directions (*Hyp.*) paralleles entr'elles, agiſſent vers des côtez directement oppoſez, ou ſont d'un même côté de cet appui A: & cela conformément au Corol. 2. du Lem. 9. lequel Corol. 2 fait voir auſſi que cette charge toûjours dirigée (*part.* 3.) ſuivant la diagonale EF, doit l'être alors de A vers E parallelement aux directions de ces deux Fig. 135. 137. 141. 142. Fig. 144. 146.

puissances P, R, & vers le côté où tend la plus forte P d'entr'elles, comme dans les Fig. 144. 146.

COROLLAIRE X.

Fig. 135. & suivantes jusqu'à 142. Tout cela suit encore du Corol. 3. joint au Lem. 9. & à ses Corol. 1. 2. sçavoir, qu'en cas d'équilibre ici entre les puissances P, R, & de l'angle MEN infiniment aigu, c'est-à-dire (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) de leurs directions paralleles entr'elles ; non seulement la charge de l'appui A est toûjours égale à la somme P+R de ces deux puissances, tant qu'elles agissent ensemble en même sens ; ou seulement égale à leur difference P—R, si elles agissent en sens contraires, mais encore que cette charge de l'appui A est toûjours dirigée parallelement aux directions de ces deux puissances vers le même côté qu'elles dans le premier cas, & vers le côté où tend la plus forte d'entr'elles dans le second. Car,

Fig. 136. 138. 139. 140. 1°. Lorsque l'angle MEN est infiniment aigu, la part. 1. du Lem. 9. fait voir que le sinus de cet angle total MEN dans les Fig. 136. 138. 139. 140. du premier cas, est égal à la somme des sinus des angles partiaux AEN, AEM. Donc (*Corol.* 3.) la charge de l'appui A est aussi toûjours alors égale en ce premier cas à la somme P+R des puissances P, R, du concours d'action desquelles (*part.* 2. 3.) il est chargé ; & cette charge toûjours dirigée (*part.* 2. 3.) suivant EF, le sera pour lors de E vers A dans les Fig. 144. 146. de la presente hypothese, Fig. 144. 146. vers le même côté ou ces deux puissances tendent, & (*Lem.* 9. *Corol.* 1.) parallelement à leurs directions, ainsi que dans le nomb. 1. du Corol. 9.

Fig. 135. 137. 141. 142. 2°. Lorsque l'angle MEN devient infiniment aigu par l'éloignement infini de son sommet E, l'angle AEN le devenant aussi pour lors, le Corol. 2. du Lem. 9. fait voir que le sinus du premier MEN de ces deux angles, partial de l'autre AEN dans les Fig. 135. 137. 141. 142. du second cas, n'est alors égal qu'à la difference dont le sinus de cet angle total AEN surpasse le sinus de son au-

tre partial AEM. Donc (*Corol.* 3.) la charge de l'appui A n'eſt non plus alors en ce ſecond cas, qu'égale à la difference P—R, dont le poids ou la puiſſance P ſurpaſſe la puiſſance R : & cette charge, toûjours dirigée (*part.* 2. 3.) ſuivant EF, le ſera pour lors de A vers E dans les Figures 144. 146. de cette hypotheſe-ci en même ſens que la plus forte P de ces deux puiſſances, pour lors directement contraire à l'autre R, & (*Lem.* 9. *Corol.* 2.) parallelement à leurs directions, ainſi que dans le nomb. 2. du Corol. 9. FIG. 144. 146.

La même choſe ſe peut encore démontrer autrement. Car ſi dans ce ſecond cas d'équilibre l'angle MEN eſt infiniment aigu, & conſequemment auſſi AEM, ou ſon égal FEG, le complement GEH du premier étant alors (*Déf.* 11. *Corollaire*) infiniment obtus avec un partial FEG infiniment aigu ; le Corol. 2. du Lem. 7. fait voir que le ſinus de cet angle total GEH ne ſera pour lors qu'égal à la difference des ſinus de ſes angles partiaux FEH, FEG ; & par conſequent (à cauſe de FEH = EFG, & de EGF complement de GEH à deux droits) le ſinus de l'angle EGF ne ſera non plus alors qu'égal à la difference des ſinus des angles EFG, FEG. Donc (*Corol.* 3. la charge de l'appui A ne ſera encore ici égale qu'à la difference P—R des deux puiſſances P, R, & dirigée (*part.* 2. 3. & *Lem.* 9. *Corol.* 2.) de A vers E dans le ſens de la plus forte P d'entr'elles, parallelement à leurs directions, ainſi qu'on le vient de voir dans les Fig. 144. 146. FIG. 135. 137. 141. 142.

COROLLAIRE XI.

La charge de l'appui A, réſultante du concours d'action des puiſſances P, R, en équilibre (*Hyp.*) entr'elles, étant toûjours alors (*part.* 3.) à chacune d'elles, comme la diagonale EF du parallelogramme GH eſt à chacun de ſes côtez EG, EH, pris ſur leurs directions, & cette diagonale devenant (quoiqu'en raiſon differente) d'autant plus grande dans le cas des Fig. 136. 138. 139. 140. & FIG. 135. & ſuivantes juſqu'à 142.

d'autant plus petite dans celui des Figures 135. 137. 141. 142. que l'angle MEN est plus aigu ; il suit manifestement que cette charge de l'appui A, sera aussi d'autant plus grande dans le premier cas, & d'autant plus petite dans le second, que cet angle MEN sera plus aigu. Donc cet angle ne pouvant jamais être plus aigu que lorsqu'il l'est infiniment, c'est-à-dire (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) que lorsque les directions des puissances P, R, sont paralleles entr'elles ; & la charge de l'appui A, résultante du concours de ces puissances, n'étant pourtant alors (*Corol.* 9. 10.) égale qu'à leur somme P+R dans le premier cas, & qu'à leur difference P—R dans le second : il suit encore évidemment que cette charge de l'appui A, ne peut jamais être plus grande que la somme de ces deux puissances P, R, dans le premier cas, ni plus petite que leur difference dans le second.

COROLLAIRE XII.

Par consequent tant que les directions des deux puissances P, R, ne seront point paralleles, quelqu'angle fini qu'elles fassent entr'elles, la charge de l'appui A résultante du concours d'action de ces deux puissances, sera toûjours moindre que leur somme dans le cas des Fig. 136. 138. 139. 140. & toûjours plus grande que leur difference dans celui des Fig. 135. 137. 141. 142. sans pourtant que cette charge de l'appui A puisse jamais devenir égale à la somme de ces deux puissances dans le second cas : de sorte que tant que les directions de ces deux puissances P, R, font entr'elles quelqu'angle fini, la charge de l'appui A, résultante de leur concours d'action sur lui, est toûjours moindre que la somme de ces deux puissances dans l'un & l'autre des cas précedens, & dans toutes les Machines de ce Théoreme-ci.

Tout cela suit encore immédiatement de la part. 3. la diagonale EF du parallelogramme GH, se trouvant toûjours moindre que la somme de ses côtez EG, EH, tant qu'ils font quelqu'angle fini entr'eux, quoiqu'elle devien-

ne d'autant plus grande que l'angle GEH devient plus aigu.

COROLLAIRE XIII.

Il est visible dans le Tour que la puissance R supposée ici en équilibre avec le poids P, pourroit se mouvoir de maniere, en desentortillant ou en entortillant sa corde autour de la roue BNB, que son point N d'application à cette roue, passeroit du côté de M dans les Fig. 136. 138. ou du côté opposé à M dans les Fig. 135. 137. de maniere, dis-je, qu'alors le cas des deux premieres de ces quatre Figures se changeroit en celui des deux autres, & reciproquement celui de ces deux autres Figures, en celui des deux premieres : & cela (*Corol.* 5.) sans que l'équilibre supposé entre les puissances P, R, cessât jamais ; puisque l'on y auroit toûjours P. R : : AN. AM. ainsi (*Corol.* 1.) que dans cet équilibre supposé. FIG. 135. 136. 137. 138.

Il est aussi visible dans le Treüil ou le Vindas, que la puissance R passant d'un côté à l'opposé par rapport à l'appui A, à la même distance AN, duquel elle fût encore appliquée ; le cas des Fig. 139. 140. se changeroit en celui des Fig. 141. 142. & reciproquement : & cela encore (*Corol.* 6.) sans que l'équilibre supposé entre cette puissance & le poids P, cessât ; puisque l'on y auroit encore (*Hyp.*) P. R : : AN. AM. ainsi (*Corol.* 1.) que dans cet équilibre supposé. FIG. 139. 140. 141. 142.

Or (*Corol.* 11.) la charge de l'axe ou appui A, résultante du concours de ces puissances P, R, ne peut jamais être plus grande que la somme de ces puissances dans le premier cas exprimé par les Fig. 136. 138. 139. 140. ni plus petite que leur difference dans le second exprimé par les Fig. 135. 137. 141. 142. Donc la charge de l'axe ou appui A du Tour, & du Treüil ou du Vindas, résultante du concours d'action des puissances P, R, qu'on y vient de supposer en équilibre, & toûjours ensuite appliquées chacune à même distance que d'abord de cet appui, de quelque côté que ce soit, & consequem- FIG. 135. & suivantes jusqu'à 142.

ment (*Corol.* 1. 6.) toûjours en équilibre entr'elles, ne peut jamais être plus grande que la somme de ces deux puissances, ni plus petite que leur difference, en quelque varieté de points de ces Machines que ces deux puissances soient successivement appliquées, toûjours chacune à même distance de l'appui A, pour y conserver (*Corol.* 1. 6.) l'équilibre entr'elles.

Voilà jusqu'ici pour ce qui concerne l'équilibre des puissances P, R, sur les Machines dont il s'agit ici. Voici aussi quelque chose qui en résulte pour le cas même où ces puissances n'y seroient pas en équilibre entr'elles, & seulement pour le besoin que nous en aurons dans la suite.

COROLLAIRE XIV.

Puisque le cas d'équilibre entre les puissances P, R, doit donner ici (*Corol.* 1.) P. R :: AN. AM. ou (*Corol.* 2.) P à R, comme le sinus de l'angle AEN au sinus de l'angle AEM; il est manifeste que lorsqu'une de ces puissances est plus grande qu'il ne faut pour avoir ce rapport à l'autre, elle doit (*Ax.* 5.) l'emporter sur elle : puisqu'alors elle seroit plus grande qu'il ne faudroit (*Corol.* 1. & 7.) pour faire équilibre ici avec elle.

COROLLAIRE XV.

Reciproquement si une de ces deux puissances P, R, l'emporte ici sur l'autre, étant alors plus grande qu'il ne faudroit pour faire équilibre avec elle, leurs directions demeurant les mêmes; elle sera aussi pour lors à l'autre en plus grande raison que la requise pour cet équilibre, laquelle est (*Corol.* 1.) de P. R :: AN. AM. ou (*Corol.* 2.) de P à R, comme le sinus de l'angle AEN est au sinus de l'angle AEM. Donc alors, si c'est la puissance ou le poids P qui l'emporte sur la puissance R, l'on aura P à R en plus grande raison que AN à AM, ou que le sinus de l'angle AEN au sinus de l'angle AEM. Pareillement si c'est la puissance R qui l'emporte sur le poids P, l'on aura de même R à P en plus grande raison que AM à

AN, ou que le ſinus de l'angle AEM au ſinus de l'angle AEN.

COROLLAIRE XVI.

De plus lorſqu'une des deux puiſſances P, R, l'emportera ici ſur l'autre, la direction de la force réſultante (*Lem.* 3. *Corol.* 1.) de leur concours, ne paſſera point (*princip. gener. Cor.* 1.) par l'axe ou l'appui A, mais entre cet appui & la direction de celle des deux puiſſances qui l'emportera ſur l'autre. Car puiſque (*Lem.* 3. *Cor.* 6.) ces deux puiſſances P, R, n'agiſſent enſemble que de cette force réſultante de leur concours ſur chacune des Machines dont il s'agit, & de même que feroit cette force ſeule; il eſt viſible (*princ. gener. Cor.* 1.) que la direction de cette force réſultante du concours de ces deux puiſſances P, R, doit paſſer du côté de celle des deux qui l'emportera ſur l'autre, entre l'appui A, & la direction de cette puiſſance prédominante.

SCHOLIE.

Il ſuit de tout ce qui précede, que dans le Tour, en cas d'équilibre entre les puiſſances P, R, qui y ſont appliquées, la varieté des directions de ces deux puiſſances, y varie toûjours (*Corol.* 8. 9. 10. 11. 12. 13.) la charge de l'appui A, réſultante du concours d'action de ces deux puiſſances ſur lui; mais qu'elle n'y varie jamais (*Cor.* 4.) le rapport de ces puiſſances entr'elles; & qu'ainſi la conſideration de leurs directions eſt tout-à-fait inutile dans la recherche de ce rapport. C'eſt pour cela que dans la ſuite, pour avoir ce rapport entre deux puiſſances en équilibre entr'elles ſur tel nombre de *Tours* à la fois qu'on voudra, nous ne nous mettrons plus en peine des angles que les directions de ces deux puiſſances y pourroient faire ou ne pas faire entr'elles, mais ſeulement des rayons ou des diamétres des rouleaux & des roues de toutes ces Machines.

THEOREME XX.

Fig. 147. 148. *Soient plusieurs Tours AMD, BNE, COF, &c. mobiles autour de leurs centres fixes A, B, C, &c. soient autant de cordes DD, EE, FR, &c. roulées sur les roues ou tambours MD, EN, OF, &c. de ces Machines, de maniere que la corde DD roulée sur le tambour DM suivant MD, le puisse être sur le rouleau ou cylindre KD suivant DK; que celle EE qui l'est sur le tambour EN suivant NE, le puisse être aussi sur le rouleau LE suivant EL; & par tout de même jusqu'au dernier Tour COF sur la roue FO duquel soit aussi la corde FR, roulée suivant OF: à l'extrêmité R de cette corde FR soit une puissance R, qui par le moyen de toutes ces Machines ou de tous ces Tours ainsi équipez, agisse contre le poids ou la puissance P appliquée à une autre corde GP, qui se puisse rouler ou filer suivant GH. Cela posé, quelques soient les directions GP, DD, EE, FR, des cordes, je dis,*

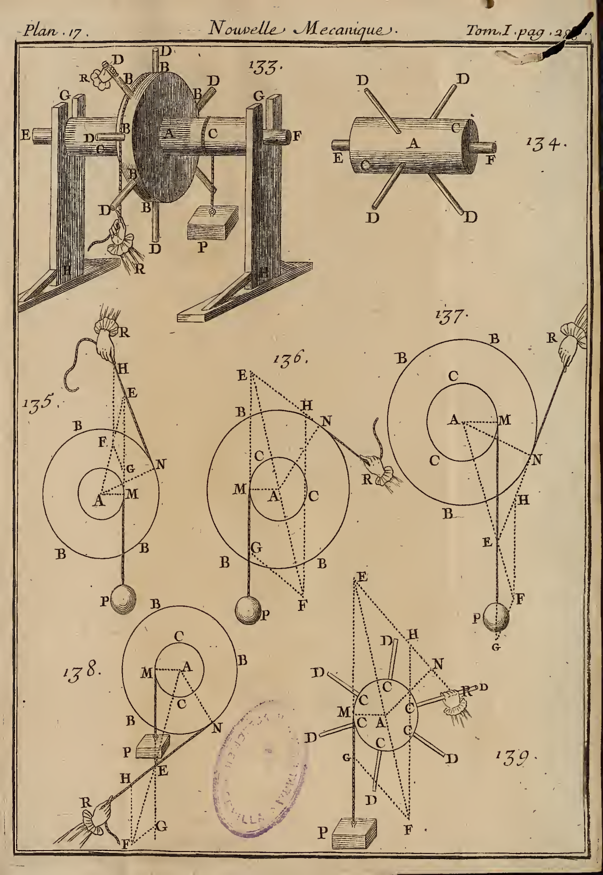
I. *Qu'en cas d'équilibre ici entre les puissances P, R, la puissance R sera à la puissance ou poids P, comme le produit des rayons de tous les rouleaux est au produit des rayons de toutes les roues, ou (ce qui revient au même) comme l'unité est à la fraction résultante du second de ces produits, divisé par le premier, quelques soient les directions de ces puissances P, R.*

II. *Reciproquement si les puissances P, R, sont entr'elles en ce rapport, elles seront ici en équilibre entr'elles, quelques en soient encore les directions.*

DEMONSTRATION.

PART. I. En ce cas d'équilibre supposé les deux forces dont chacun des cordons DD, EE, &c. est directement tiré en sens contraires, étant (*Ax.* 5.) égales entr'elles, soient appellez D chacune des deux dont le cordon DD est ainsi tiré; E, chacune des deux dont le cordon EE est aussi tiré directement en sens contraires, &c. Cela posé, si des appuis ou centres fixes A, B, C, &c. par les points G, D, D, E, E, F, &c. où les rouleaux & les roues sont touchées par les parties droites des cordes, on imagine les rayons AG, AD, BD, BE, CE, CF, &c. de ces rouleaux

&


133.
134.
135.
136.
137.
138.
139.

& de ces roues ; le Corol. 1. & le nomb. 2. du Corol. 3. du Th. 19. donneront ici chacun

R. E : : CE. CF. sur le Tour COF ;
E. D : : BD. BE. sur le Tour BNE ;
D. P : : AG. AD. sur le Tour AMD,
&c.

Donc (en multipliant par ordre) l'on aura ici R. P : : AG×BD×CE× &c. AD×BE×CF× &c : : 1. $\frac{AD\times BE\times CF\times}{AG\times BE\times CE\times}$ &c. C'est-à-dire, la puissance R au poids P, comme le produit des rayons de tout ce qu'il y a ici de rouleaux, est au produit des rayons de toutes leurs roues, ou comme l'unité est à la fraction faite du second de ces produits, divisé par le premier. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

PART. II. Je dis presentement que si les puissances P, R, appliquées comme ci-dessus, sont entr'elles en cette raison, elles demeureront ici en équilibre entr'elles. Car si elles n'y demeuroient pas, & qu'une des deux, par exemple, R, l'emportât sur P ; il est visible qu'alors cette puissance R l'emporteroit sur E dans le Tour COF, E sur D dans le Tour BNE, D sur P dans le Tour AMD, &c. & consequemment qu'alors (*Th.* 19. *Cor.* 15.) on auroit

R. E > CE. CF. dans le Tour COF ;
E. D > BD. BE. dans le Tour BNE ;
D. P > AG. AD. dans le Tour AMD,
&c.

Donc (en multipliant par ordre) l'on auroit aussi pour lors R. P > AG×BD×CE× &c. AD×BE×CF× &c. c'est-à-dire, qu'alors la puissance R seroit au poids P en plus grande raison que le produit des rayons des rouleaux au produit des rayons des roues ; ce qui est contre l'hypothese. Si au contraire on vouloit que ce fût P qui l'emportât sur R, on trouveroit de même R à P en moindre raison que le premier de ces deux produits au second ; ce qui est encore contre l'hypothese. Donc aucune de ces deux puis-

sances ne l'emportera ici sur l'autre, & par consequent elles y demeureront en équilibre entr'elles tant que la premiere R sera à la seconde P, comme le produit des rayons de tout ce qu'il y a ici de rouleaux, est au produit des rayons de toutes leurs roues. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

Autrement. Si les deux puissances R, P, supposées entr'elles en ce rapport, ne demeuroient pas ici en équilibre entr'elles, soit à la place de R quelqu'autre puissance S qui y demeurât en équilibre avec la puissance ou le poids P. La part. 1. donneroit alors S à P, comme le produit des rayons de tout ce qu'il y a ici de rouleaux, est au produit des rayons de toutes leurs roues. Mais telle est aussi (*Hyp.*) la raison de R à P. Donc on auroit ici S=R; & par consequent cette nouvelle puissance S y demeurant (*Hyp.*) en équilibre avec le poids P, la puissance R y demeureroit aussi (*Ax.* 2.) en équilibre avec ce même poids P. *Ce qu'il falloit encore 2°. démontrer.*

COROLLAIRE I.

Cette part. 2. jointe au Corol. 1. & au nomb. 2. du Corol. du Th. 19. fait voir que lorsqu'on aura ici R.P :: AG×BD×CE× &c. AD×BE×CF× &c. l'on y aura toûjours aussi, 1°. R.E :: CE.CF. 2°. E. D :: BD. BE. 3°. D.P :: AG. AD. 4°. &c. Car puisque ce rapport de R à P rend ici (*part.* 2.) ces deux puissances R, P, en équilibre entr'elles, & que cet équilibre ne peut être sans ceux de R avec E, de E avec D, de D avec P, &c. Ce rapport de R à P ne peut être non plus, suivant le Corol. 1. & le nomb. 2. du Corol. 3. du Th. 19. sans qu'il y ait, 1°. R. E :: CE. CF. 2°. E. D :: BD. BE. 3°. D. P :: AG. AD. 4°. &c. ainsi qu'on le vient d'avancer.

COROLLAIRE II.

FIG. 147. 148. 149. Les longueurs des cordons DD, EE, &c. supposez sans pesanteur, ne servant ici (Fig. 147. 148.) qu'à la communication d'action des puissances P, R, d'un Tour à

l'autre immédiatement ſuivant depuis le premier juſqu'au dernier ; & cette communication d'action y devant toûjours être la même, quelques ſoient ces longueurs DD, EE, &c. il eſt viſible que quand elles deviendroient nulles, & que les points D, D, E, E, &c. ſe confondroient en un deux à deux de même nom, ainſi que dans la Fig. 149. dans laquelle la roue MD touche en D le rouleau DK, & la roue NE touche en E le rouleau FL ; cette communication d'action des puiſſances P, R, ſubſiſteroit encore la même de chacune de ces Machines à ſa voiſine par le moyen des reſtes de cordes NDK, NEL, &c. roulées ſuivant l'ordre de ces lettres ſur leurs roues & rouleaux ; & qu'ainſi tout ce qu'on vient de voir dans les Fig. 147. 148. doit pareillement être vrai dans la Fig. 149. Donc,

1°. En cas d'équilibre entre les puiſſances P, R, ſur les Tours qui ſe toucheroient comme dans cette Fig. 149. l'on auroit en general (*part.* 1.) R. P : : AG×BD×CE &c. AD×BE×CF &c. ou R. P : : 1. $\frac{AD \times BE \times CF}{AG \times BD \times CE}$ &c. Fig. 149.

2°. Reciproquement ſi les puiſſances P, R, ſont entre-elles en ce rapport dans cette même Fig. 149. il y aura pour lors (*part.* 2.) équilibre entr'elles.

COROLLAIRE III.

Au lieu des cordes MDK, NEL, roulées ſur les roues MD, NE, & ſur les rouleaux DK, EL, qui les touchent dans la Fig. 149. ſi l'on imagine que ces roues ſoient dentées, que les bandes circulaires qu'elles touchent de ces rouleaux, ſoient auſſi dentées en pignons engrenez avec elles, ainſi que dans la Fig. 150. dans laquelle la puiſſance R à un des bras CQ de Treüil, ou Vindas, ou de Manivelle, lequel en cas de mouvement fît décrire au point F de la perpendiculaire CF à la direction RF de cette puiſſance, un cercle OF tel que la roue OF de la Fig. 149. lui auroit fait décrire ſi cette puiſſance y eût été appliquée en F : alors voyant que l'action de cette puiſſance R, Fig. 149. 150.

est la même dans la Fig. 150. sur le bras CF, & sur le pignon EL, que sur la roue OF & sur le rouleau EL de la Fig. 149. voyant de plus que l'effort de ce pignon EL sur la roue EN, par l'engrenement de leurs dents, se fait suivant les touchantes communes en E dans la Fig. 150. comme celui du rouleau EL sur la roue EN par le moyen de la corde NEL roulée sur l'un & sur l'autre dans la Fig. 149. & ainsi de l'effort fait en D dans chacune de ces deux Fig. 149. 150. On verra que dans celle-ci comme dans l'autre,

Fig. 150. 1°. En cas d'équilibre entre les puissances P, R, sur le roüage de la Fig. 150. il doit y avoir encore en general (*Corol. 2. nomb.* 1.) R. P :: AG×BD×CE× &c. AD×BE×CF× &c. ou R. P :: 1. $\frac{AD\times BE\times CF\times}{AG\times BD\times CE\times}$ &c.

2°. Reciproquement si les puissances R, P, sont entre-elles en ce rapport sur le roüage de la Fig. 150. il y aura pour lors (*Corol. 2. nomb.* 2.) équilibre entr'elles.

COROLLAIRE IV.

Fig. 147. 148. 149. 150. Si dans la Fig. 150. on regarde la puissance R appliquée au bras CQ d'un Treüil ou Vindas, ou d'une Manivelle, comme si elle étoit appliquée au point F d'une roue OF décrite du rayon CF perpendiculaire à la direction RF de cette puissance R, de même qu'elle l'est au point F du tambour OF dans les Fig. 147. 148. 149. & que pour nous exprimer plus universellement, on prenne cette roue OF imaginée dans la Fig. 150. pour celle d'un *Tour* substitué à la place de ce Treüil ou Vindas, ou de cette Manivelle : il suit de tout ce qui précede (excepté du Corol. 1.) que de quelque nombre de *Tours* que soient faites les Machines entieres des Fig. 147. 148. 149. 150.

1°. En cas d'équilibre entre les deux puissances P, R, dont la premiere P soit appliquée au rouleau du premier Tour, & la seconde R à la roue du dernier ; la premie-

re P de ces deux puiſſances ſera par tout ici à la ſeconde R, comme le produit des rayons de toutes les roues, ſera au produit des rayons de tous leurs rouleaux ou pignons.

2°. Reciproquement ſi ces deux puiſſances ainſi appliquées à ces Machines, ſont entr'elles en cette raiſon, elles y ſeront en équilibre entr'elles.

COROLLAIRE V.

Si l'on prend *n* pour le nombre de ce qu'il y a de *Tours* dans chacune de ces Machines entieres des Fig. 147. 148. 149. 150. & que le rayon de la roue de chacun de ces Tours ſoit dans tous en même raiſon quelconque au rayon de ſon rouleau ou pignon, en ſorte qu'on ait par tout ici AD. AG : : BE. BD : : CF. CE : : &c. l'on y aura auſſi pour lors

1°. AD. AG : : AD. AG.
2°. AD. AG : : BE. BD.
3°. AD. AG : : CF. CE.
n^o &c.

Donc (en multipliant par ordre) l'on y aura pareillement $\overline{AD}^n$. $\overline{AG}^n$: : AD×BE×CF× &c. AG×BD×CE× &c. Or on vient de voir en general dans tout ce qui précede, excepté dans le Corol. 1. que le cas d'équilibre entre les puiſſances P, R, ſur chacune des Machines dont il s'agit ici, y donne toûjours P. R : : AD×BE×CF× &c. AG×BD×CE× &c Et reciproquement que lorſque ces puiſſances ſont entr'elles en ce rapport, elles y ſont en équilibre entr'elles. Donc en ce cas-ci des rayons des roues par tout en même raiſon aux rayons de leurs rouleaux ou pignons,

1°. Si les puiſſances P, R, y ſont en équilibre entr'elles, l'on y aura toûjours P. R : : $\overline{AD}^n$. $\overline{AG}^n$ (*Hyp.*) : : $\overline{BE}^n$. $\overline{BD}^n$ (*Hyp.*) : : $\overline{CF}^n$. $\overline{CE}^n$: : &c.

2°. Reciproquement ſi ces deux puiſſances P, R, ſont

entr'elles en cette raiſon dans ce cas-ci, elles y ſeront en équilibre entr'elles.

COROLLAIRE VI.

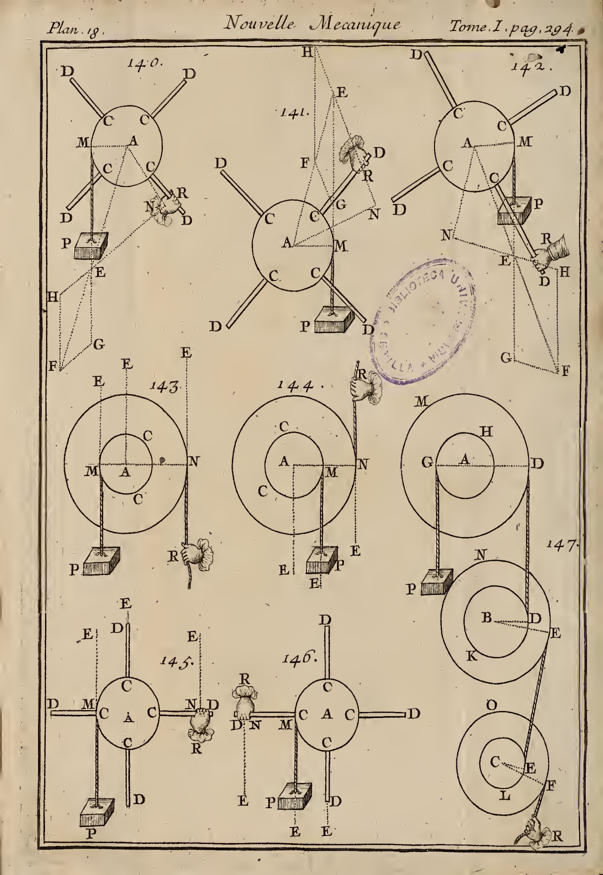
Si l'on prend r à 1 dans la raiſon quelconque du rayon de la roue de chaque *Tour* au rayon de ſon rouleau ou pignon, ſuppoſée encore ici la même dans tous ; l'on y aura r. 1 :: AD. AG :: BE. BD :: CF. CE :: &c. Et conſequemment AD$=r\times$AG, BE$=r\times$BD, CF$=r\times$CE, &c. Donc en ſubſtituant ces valeurs de AD, BE, CF, &c. en leurs places dans le nomb. 1. du Corol. 5.

1°. Ce nomb. 1. du Corol. 5. donnera pour ici P. R :: $\overline{r\times AG}^{n}$. $\overline{AG}^{n}$ :: $\overline{r\times BD}^{n}$. $\overline{BD}^{n}$ :: $\overline{r\times CE}^{n}$. $\overline{CE}^{n}$ :: &c. c'eſt-à-dire, par tout ici P. R :: r^{n}. 1. en cas d'équilibre entre ces puiſſances P, R.

2°. Reciproquement le nomb. 2. du même Corol. 5. fera voir que ces puiſſances P, R, ſeront ici en équilibre entr'elles, tant qu'il y aura P. R :: r^{n}. 1.

COROLLAIRE VII.

FIG. 150. 151. 152. Si la Machine vûe de front dans la Fig. 150. eſt regardée de côté comme dans la Fig. 151. dont les axes AA, BB, CC, &c. ſont repreſentez par A, B, C, &c. dans la Fig. 150. ſi de plus au lieu des pignons de cette Machine ainſi vûe de côté dans la Fig. 151. on y imagine des lanternes comme dans la Fig. 152. entre les fuſeaux deſquelles les dents des roues s'engrennent comme entre les dents des pignons des Fig. 150. 151. ſi enfin l'on ſuppoſe dans les Machines des Fig. 151. 152. que les rayons AD, BE, CF, des roues, & ceux AG, BD, CE, &c. des pignons ou des lanternes, y ſoient perpendiculaires à leurs axes AA, BB, CC, &c. comme dans la Fig. 150. en comprenant encore ici (pour abreger nos expreſſions) le cercle OF ſous le nom de *Roue*, & le rouleau de la roue MD ſous le nom de *Pignon* : on verra dans les Fig. 151. 152. comme dans la Fig. 150.



BIBLIOTECA UNIV. SEVILLA

I. Qu'en general pour tous les roüages, quels qu'y soit le nombre des roues & des pignons ou des lanternes, & les rapports de leurs rayons.

1°. Le nomb. 1. des Corol. 3. 4. y donnera P. R :: AD×BE×CF× &c. AG×BD×CE× &c. tant que les puissances P, R, y seront en équilibre entr'elles.

2°. Et le nomb. 2. des mêmes Corol. 3. 4. fera reciproquement voir que ces puissances P, R, y étant entre-elles dans ce rapport, il y aura toûjours équilibre entr'elles.

II. Si *n* est le nombre de ce qu'il y a de roues dans ces Machines, & que ce rayon de chaque roue y soit par tout à celui de son pignon ou de sa lanterne :: *r*. 1. quelque soit ce rapport supposé par tout le même.

1°. Le nomb. 1. du Corol. 6. donnera toûjours ici P. R :: r^n. 1. tant que ces puissances P, R, y seront en équilibre entr'elles.

2°. Et reciproquement le nomb. 2. du même Corol. 6. les y fera voir en équilibre tant qu'elles y seront en ce rapport entr'elles.

COROLLAIRE VIII.

Puisque par tout ce qui précede (excepté par le Cor. 1.) en cas d'équilibre entre les deux puissances P, R, sur chacune des Machines des Fig. 147. 148. 149. 150. 151. 152. la puissance ou le poids P est toûjours à la puissance R, comme le produit des rayons des tambours ou des roues de tous les *Tours* qui composent chacune de ces Machines entieres, est au produit des rayons de tous leurs rouleaux ou pignons, ou lanternes; il est visible que le rayon du tambour ou de la roue de chaque *Tour* étant toûjours plus grand que le rayon de son rouleau, ou de son pignon, ou de sa lanterne, il faudra d'autant moins de force à la puissance R pour faire équilibre avec le poids P sur la Machine où ces deux puissances seront appliquées comme cidessus, que cette Machine sera faite d'un plus grand nombre de *Tours*, & que le rayon du tambour ou de la roue de chaque *Tour* y sera plus grand par rapport au rayon de son rouleau ou de son pignon, ou de sa lanterne.

FIG. 147. & suivantes jusqu'à 152.

Par exemple, si les roues des *Tours* de chacune de ces Machines, sont toutes de rayons en même raison quelconque de r à 1, aux rayons de leurs rouleaux ou pignons ou lanternes, comme dans le Corol. 6. & dans l'art. 2. du Corol. 7. si de plus n exprime le nombre des *Tours* dont chacune de ces Machines est composée, comme dans les Corol. 5. 6. & 7. art. 2. les nomb. 1. du Corol. 6. & de l'art. 2. du Corol. 7. donnant pour ce cas-ci P. R :: r^n. 1. lorsque les puissances P, R, sont en équilibre entr'elles sur les Machines des Fig. 147. 148. 149. 150. 151. 152. On voit que plus le nombre n de leurs *Tours* sera grand, & plus sera grand aussi le rapport $\frac{r}{1}$ du rayon de chacune de leurs roues ou tambours, au rayon de son rouleau ou pignon ou lanterne; plus au contraire la puissance R devra être petite pour y faire équilibre avec un même poids P: en voici quelques exemples.

Le cas particulier des Fig. 147. 148. 149. 150. 151. 152. où il n'y a que trois roues (en y prenant pour une roue le cercle OF du Treüil, du Vindas, ou de la Manivelle, dans les Fig. 150. 151. 152.) chacune d'un rayon appellé r, & trois rouleaux (en y comprenant aussi les pignons & les lanternes) supposez chacun d'un rayon $=1$. par rapport au rayon (r) de sa roue: ce cas, dis-je, ayant ainsi $n=3$, la précedente analogie generale R. P :: 1. r^n. s'y réduira à R. P :: 1. r^3. D'où l'on voit qu'en cas d'équilibre l'on y auroit,

1°. R. P :: 1. 125. si $r=5$: c'est-à-dire, qu'alors une livre de force en soûtiendroit ici 125.

2°. R. P :: 1. 216. si $r=6$: c'est-à-dire, qu'alors une livre de force en soûtiendroit 216.

3°. R. P :: 1. 343. si $r=7$: c'est-à-dire, qu'alors une livre de force en soûtiendroit 343.

4°. R. P :: 1. 512. si $r=8$: c'est-à-dire, qu'alors une livre de force en soûtiendroit 512.

5°. R. P :: 1. 729. si $r=9$: c'est-à-dire, qu'alors une livre de force en soûtiendroit 729.

6°.

6°. R. P :: 1. 1000. si $r = 10$: c'est-à-dire, qu'alors une livre de force soûtiendroit un poids de 1000. livres.

Et ainsi de suite, selon que le rapport $\frac{r}{1}$ seroit plus grand.

Cette même puissance R d'une livre de force soûtiendroit encore ici de bien plus grands poids P, si au lieu de trois *Tours*, il y en avoit ici davantage, & des poids d'autant plus grands qu'il y auroit plus de *Tours*, ou que le nombre *n* de ces *Tours* seroit plus grand.

De-là, & de tout ce qui précede, il suit qu'il n'y a point de poids si énorme, qu'on ne puisse faire soûtenir à la moindre force ou puissance imaginable que ce soit, par le moyen de plusieurs *Tours* ajustez entr'eux comme dans les Fig. 147. 148. 149. 150. 151. 152. soit par la multiplication de ces *Tours*, soit par l'augmentation du rapport des rayons de leurs tambours ou roues aux rayons de leurs rouleaux ou pignons ou lanternes, soit enfin (pour faire davantage) par tous les deux ensemble.

SCHOLIE.

I. Telle est la raison de la force prodigieuse du Criq de la Fig. 151. pour élever ou pour traîner toutes sortes de fardeaux P par le moyen de la Manivelle CRQ que la puissance R fait tourner; je veux dire la raison de la prodigieuse petitesse de force R qu'il y faut employer pour élever ou traîner les fardeaux les plus lourds. Cette Machine est non seulement très-puissante, mais encore d'autant plus commode, qu'elle tient très-peu de place: elle en tient si peu, qu'on la peut cacher dans une boëte ou caisse fort petite, & par-là en rendre la force plus merveilleuse aux ignorans, qui sont effrayez de lui voir faire marcher des Chariots, traîner des Canons, &c. avec très-peu d'effort ou de peine de la part de celui qui la fait agir. FIG. 151.

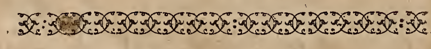
II. Les Moufles peuvent aussi être logées dans de très-petits espaces; mais il s'en faut bien que'lles ne

soient aussi puissantes que le Criq ; il leur faudroit bien des Poulies pour arriver à l'égaler en force, quelque nombre de roues qu'il eût, & quelque petits que fussent les rapports des rayons de ses roues & de sa manivelle à ceux de son rouleau & de ses pignons. Puisque la moindre force requise pour soûtenir un poids avec des Poulies ou des Moufles, doit être à ce poids (*Th.* 17. *Corol.* 3 4.) comme l'unité est au double du nombre des Poulies mobiles, lorsqu'un des bouts de la corde est attaché à la Moufle fixe ; ou (*Th.* 18. *Corol.* 3.) comme l'unité est au double du nombre des Poulies mobiles, augmenté de cette unité, lorsque ce bout de la corde est attaché à la Moufle mobile, au lieu que dans le Criq la puissance R, pour être ainsi en équilibre avec le poids P, ne doit en general être à ce poids (*Corol.* 7. *art.* 1. *nomb.* 1.) que comme l'unité est à la fraction résultante du produit des rayons des roues & de la manivelle, divisé par le produit des rayons du rouleau & des pignons ; & seulement (*Corol.* 7. *art.* 2. *nomb.* 1.) comme le rayon du rouleau, ou d'un des pignons, pris pour l'unité, est au rayon d'une des roues ou de la manivelle, élevé à un degré, dont le nombre des roues (le cercle OF de la manivelle étant pris pour une roue) soit l'exposant, lorsque les rayons des roues & de la manivelle sont dans toutes en même raison aux rayons de leur rouleau & de leurs pignons, ainsi que dans le Corollaire 7. art. 2. Cela, dis-je, étant ainsi dans les Moufles & dans le Criq, une roue engrenée dans un pignon, pouvant seule avec lui (par la seule grandeur du rapport de son rayon à celui de son pignon) épargner plus de force dans l'usage du Criq, que plusieurs Poulies ensemble dans une Moufle ; la force du Criq entier doit être incomparablement plus grande que celle des Moufles, à pareil nombre de pieces, & même à beaucoup moins de pieces dans le Criq que dans les Moufles.

III. Cette raison fait voir que l'homme qu'on a vû dans les articles 2. des Scholies des Théoremes 17. 18.

pouvoir s'élever soi-même seul jusqu'à la hauteur, par exemple, de la voûte d'une Eglise, par le moyen des Mouffles, pourroit s'y élever aussi seul, & beaucoup plus aisément par le moyen du Criq attaché ferme à un panier dans lequel cet homme seroit, à l'aide d'une corde attachée par un bout à cette voûte, & par l'autre à la circonference du rouleau de ce Criq: cette corde se filant autour de ce rouleau à mesure que cet homme feroit tourner la manivelle de cette Machine, elle enleveroit ainsi cet homme avec la Machine & le panier si haut qu'il voudroit vers la voûte. Il est encore à remarquer que quelque aisément que cet homme se puisse ainsi enlever par le moyen d'un Criq, & d'autant plus aisément que ce Criq auroit plus de roues; le Corol. 7. du Th. 14. fait voir que ce même homme se pourroit enlever encore avec la moitié moins de force ou de peine, si la corde attachée au rouleau de cette Machine passoit par dessus une Poulie attachée à la voûte, d'où elle revînt s'attacher par son autre bout au panier.

IV. Afin que les roues des Fig. 150. 151. 152. puissent jouer librement, il est visible que leurs dents doivent être égales à celles des pignons dans lesquelles ces roues s'engrenent, & les entre-deux de ces dents aussi égaux de part & d'autre, je veux dire dans la roue & dans le pignon qui s'engrene avec elle; de sorte que le nombre des dents de cette roue doit être à celui des dents de ce pignon, comme la circonference de la roue à la circonference du pignon, ou (ce qui revient au même) comme le rayon de la roue au rayon du pignon. Il faut prendre garde que ces dents de roues & de pignons doivent être un peu arondies, pour empêcher, ou du moins pour diminuer l'opposition que leur rencontre perpendiculaire de l'une avec l'autre pourroit faire à leur mouvement. La figure qui leur convient pour cela se perfectionnera dans l'usage de la Machine, en se frottant & en s'usant les unes contre les autres.



SECTION V.

De toutes sortes de Leviers, de quelque figure, de quelque espece, & dans quelque situation qu'ils soient, & pour toutes les directions possibles des puissances, ou des poids qui y sont appliquez.

DEFINITION XXI.

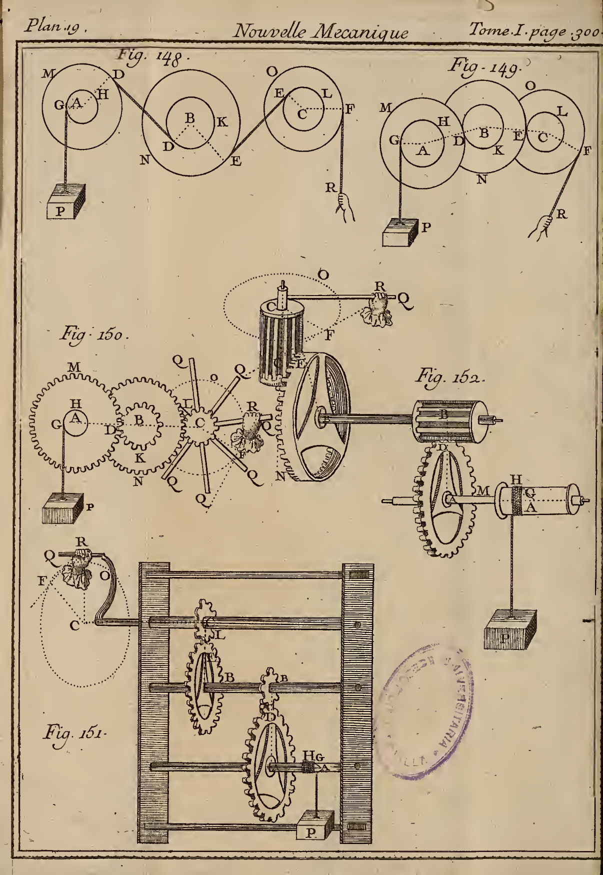
Fig. 153. & suivantes jusqu'à 167.

LE *Levier* est une verge inflexible MN, de figure quelconque, considerée sans pesanteur, à laquelle on conçoit trois puissances E, F, H, appliquées en differens endroits X, O, B; ou deux puissances E, F, & un appui B, qui par sa résistance tient lieu de la troisiéme puissance H, & dont la *charge* est ce qu'il a à soûtenir du concours d'action des deux autres, ou de tant d'autres puissances qu'on y pourroit supposer dirigées à volonté.

COROLLAIRE.

Quelque soit sur l'appui B d'un Levier quelconque la charge résultante du concours d'action de tant de puissances qu'on voudra, appliquées à volonté à ce Levier, & en équilibre entr'elles sur cet appui; la résistance qu'il y doit faire pour cet équilibre, doit être (*Ax. 4.*) égale & directement opposée à cette charge. Cet appui s'appelle d'ordinaire *Hypomochlion*, nom tiré du Grec, & fort en usage dans la Statique.

On ne met ici tant de figures de Leviers avec tant de directions differentes de puissances, que pour faire mieux sentir l'universalité du Théoreme suivant, dont la démonstration, aussi-bien que lui, va convenir également à chacun d'eux, & à tout ce qu'on en pourroit imaginer d'autres: & cela sans être obligé de passer (ainsi que l'on fait d'ordinaire) par le


Fig. 148.
Fig. 149.
Fig. 150.
Fig. 151.
Fig. 152.

Levier droit posé sur un appui mis entre deux puissances de directions paralleles entr'elles, & perpendiculaires à ce Levier, pour arriver aux autres, ainsi (dis-je) qu'on le fait d'ordinaire par des suppositions qui, qu'oique vrayes, ne sont pas assez évidentes pour être admises aussi gratuitement qu'on les fait.

SCHOLIE.

I. Au lieu de deux puissances & un appui, on considere d'ordinaire dans le Levier une puissance, un poids, & un appui, comme si la pesanteur d'un poids n'étoit pas une force semblable à celle d'une puissance qui lui seroit égale, & de même direction qu'elle. Cette seule varieté d'expression a fait diviser le Levier en trois especes qu'on a soigneusement distinguées l'une de l'autre, comme si elles étoient differentes.

On appelle *Levier de la premiere espece*, celui dont l'appui est placé entre le poids & la puissance; *Levier de la seconde espece*, celui dont le poids est entre la puissance & l'appui, & *Levier de la troisiéme espece*, celui dont la puissance est entre le poids & l'appui.

Mais si à la place du poids & de l'appui on substitue suivant leurs directions deux puissances, dont une soit égale à la pesanteur du poids, & l'autre égale à la résistance de l'appui; on verra toutes ces differences de Leviers disparoître, & se réduire toutes à celui de la précedente Déf. 21. auquel trois puissances sont appliquées en differens endroits, & de maniere qu'une quelconque d'entr'elles agisse toujours seule contre les deux autres. De-là s'évanouissent aussi, comme badines, toutes les questions faites par Aristote dans sa Mécanique, & par plusieurs autres après lui, sur les Rames, les Mats, & le Gouvernail d'un Vaisseau; sçavoir, à quelle espece de Levier chacune de ces pieces doit se rapporter. Il n'y a qu'à prendre pour appui sa puissance qui se trouve au point où chacun de ces Auteurs le veut, & pour puissance la résistance de l'appui, pour faire voir que toutes ces questions ne sont que de nom.

II. Ce qui a fait imaginer, ou du moins fort autorisé cette division de Leviers en plusieurs especes, a peut-être été le défaut d'une démonstration generale, qui convînt à toutes ces prétendues especes à la fois. Tout ce que j'en ai vû de differentes de celle qui se trouve dans le Projet de ceci, publié en 1687. n'est que de la premiere de ces especes de Leviers, de laquelle on passe ensuite aux deux autres : on y suppose, dis-je, d'abord un Levier droit sur un appui posé entre deux poids ou deux puissances, ou entre une puissance & un poids; ensuite par des suppositions nouvelles, ce qu'on a dit des proprietez de l'équilibre sur le Levier droit, on l'adapte aux angulaires ou aux coudes de son espece, & ensuite à ceux dont l'appui se trouve à une de leurs extrêmitez.

III. Ce défaut n'est pas le seul qui empêche ces démonstrations d'être universelles ; elles sont encore limitées par la supposition qu'on y fait que les directions des puissances ou des poids appliquez aux Leviers, y sont paralleleles entr'elles : de sorte que ce n'est encore que par des suppositions nouvelles qu'on passe de ce cas de parallelisme à celui où les directions feroient quelqu'angle entr'elles. Ce second défaut a paru seul si considerable au sçavant M. Fermat, qu'il n'a point craint de dire dans la page 142. du Recueil de ses Ouvrages, imprimé à Toulouse en 1679. *Fundamenta Mechanices non satis accurata tradidisse Archimedem fueram dudum suspicatus : supposuisse enim motus gravium descendentium inter se parallelos patet, nec verò absque hac hypothesi constare possunt ipsius demonstrationes. Non inficior quidem hypothesim hanc ad sensum proximè accommodari, quippe propter magnam à centro Terræ distantiam possunt descensus gravium supponi paralleli, non secùs ac radii solares : sed veritatem intimam & accuratam quærentibus, hæc non satisfaciunt. Generalis nempè Vectium natura in quolibet mundi loco videtur consideranda & astruenda ; ideòque nova in Mechanicis fundamenta è veris & proximis principiis sunt accersenda.*

M. de Fermat parle ainsi à l'occasion d'une contestation

rapportée en plusieurs Lettres depuis la pag. 122. jusqu'à la pag. 151. du Recueil qu'on vient de citer de ses Ouvrages, laquelle a duré six mois entre lui d'une part, & Messieurs Paschal & Roberval de l'autre, sans pouvoir s'accorder sur les proprietez du Levier dans l'hypothese des directions des poids concourantes au centre de la Terre, dont il s'agissoit de donner une démonstration immédiate & indépendante du parallelisme : chacun des deux partis trouvoit toûjours à rédire à la démonstration que l'autre croyoit en avoir trouvée.

IV. Sans entrer dans le détail de cette contestation qui se trouve dans les Lettres dont on vient de parler, il est aisé de voir par tout ce qui précede, que ces trois grands Géométres, ausquels les mouvemens composez étoient si familiers, auroient été bien-tôt d'accord entre-eux, s'ils avoient alors seulement tourné la tête de ce côté-là : car voyant, suivant la doctrine de ces mouvemens, conformément au Cor. 7. du Lem. 3. que les deux poids supposez appliquez à un Levier avec des directions tendantes de part & d'autre au centre de la Terre, n'agissoient ensemble sur ce Levier que comme une force unique, égale à la résultante de leur concours, dirigée comme elle suivant la diagonale d'un parallelogramme fait de côtez pris entr'eux en raison de ces poids sur les directions de ces mêmes poids ; ils auroient tout-aussi-tôt, conformément au Corol. 2. du principe general, conclut que pour l'équilibre entre ces deux poids l'appui du Levier devoit être en quelque point à volonté, de sa rencontre avec cette diagonale prolongées, & de-là se seroient offertes à eux toutes les proprietez & les suites qu'on va voir de cet équilibre par cette voye dans le Théoreme suivant, qui renfermera beaucoup plus que ces Messieurs ne cherchoient, étant d'une universalité qui embrasse toutes sortes de Leviers à la fois, quelques soient leurs figures, leurs situations, & les directions des poids ou des puissances qui s'y trouveront appliquées ; & cela sans aucune dépendance du parallelisme de ces directions, sans lequel

avant le Projet de ceci publié en 1687. perſonne (que je ſçache) n'avoit encore rien démontré de ce qui réſulteici de leur concours, qui bien loin d'être ainſi une ſuite de ce parallelisme, eſt au contraire le general dont ce parellelisme lui-même n'eſt qu'un cas ſur une infinité de poſitions differentes de ces directions, toutes compriſes dans ce Théoreme univerſel ſous le nom general d'angles quelconques, deſquels le plus aigu de toutes les poſſibles eſt (dis-je) ce parallelisme lui-même, ainſi qu'il paroît par les Corol. 1. 2. du Lem. 6.

DEFINITION XXII.

Les perpendiculaires menées de l'appui d'un Levier quelconque ſur les directions des poids ou puiſſances qui leur ſeront appliquées, ſeront appellées leurs *diſtances à l'appui*, ou ſimplement les *diſtances* de ces poids ou de ces puiſſances; & les parties du Levier compriſes entre ce même appui & les directions de ces poids ou puiſſances, ſeront appellées *bras* du Levier.

Le produit de chaque poids ou puiſſance abſolue par ſa diſtance à l'appui du Levier auquel elle eſt appliquée, s'appelle en Latin *Momentum*, ce que le Corol. 4. du Th. 21. qu'on va voir, me fait croire ne pouvoir mieux s'exprimer en François que (*Déf.* 1.) par le mot de *Force relative*, ou d'*impreſſion* ou d'*action* ſur le Levier auquel ce poids ou cette puiſſance eſt appliquée: nous ne laiſſerons pourtant pas de l'appeller auſſi *Moment*, pour nous moins éloigner du langage ordinaire. La raiſon de ce nom vient ſans doute de ce que ces produits ſont égaux ou inégaux (ainſi qu'on le verra dans les Corol. 7. 8. 9. 10. du Théoreme ſuivant) comme les impreſſions de deux puiſſances ſur un Levier, ſelon qu'elles ſont ou ne ſont pas équilibre entr'elles ſur ſon appui. Ce qui ſe dit ici des forces relatives (*Momenta*) des forces ou puiſſances abſolues, ſe dit auſſi des réſiſtances relatives des abſolues, qui (*Ax.* 2. 3. 4.) ſuppléent ces forces.

DEFINITION XXIII.

Outre l'usage ordinaire des Leviers pour enlever ou remuer de grands fardeaux, le droit MN, dont l'appui B est entre le poids & la puissance, sert encore à peser des marchandises placées à une de ses extrêmitez contre un poids de pesanteur connue suspendu à l'autre extrêmité de ce Levier, dans l'hypothese des directions des poids paralleles entr'elles, & alors ce Levier s'appelle *Balance*, lorsque les bras BM, BN, en sont égaux; & *Peson* ou *Romaine*, lorsqu'ils sont inégaux. FIG. 169. 170.

Dans la Balance le Levier MN s'appelle *Fleau* ou *Traversain*; BH, l'*Anse* ou la *Chasse*; BG, l'*Aiguille*, laquelle d'une piece avec le fleau, lui est perpendiculaire, & mobile avec lui autour de l'essieu B; les deux pieces E, F, fixement suspendues aux extrêmitez M, N, du fleau, s'appellent *Bassins*, lorsqu'elles sont creusées en forme d'Ecuelles sans oreilles, & *Plateaux*, lorsque ce ne sont que des pieces de bois plates ordinairement quarrées, comme dans certaines Balances des pauvres gens de campagne, ou dans les grandes des Doüanes. FIG. 169.

Dans le Peson ou la Romaine le Levier MN s'appelle la *Verge*; BH, l'*Anse*; MC, le *Crochet*, auquel la marchandise E, ou le poids à peser est suspendu à l'extrémité M de son petit bras BM; & F, la *Masse*, qui est un poids de pesanteur connue, comme d'une livre, ou deux, &c. suspendu à un *Anneau* O plat, posé sur son tranchant, & mobile le long du grand bras BN, dont il est enfilé, & qui est divisé en parties égales à BM. FIG. 170.

THEOREME XXI.

Fondamental de la presente Section 5.

Dans toutes sortes de Leviers MN de figures & de positions quelconques, quelques soient aussi les directions XE, OF, BH, des trois puissances E, F, H, qui y soient appliquées en autant de points quelconques X, O, B, sçavoir, celle du point du mi- FIG. 153. & suivantes jusqu'à 167.

lieu contre les deux autres, ou deux quelconques E, F, d'entr'elles contre un appui invincible B mis à la place de la troisiéme H.

I. *En cas d'équilibre entre ces trois puissances E, F, H, ou entre les deux premieres E, F, sur l'appui B; quelqu'angle DAP ou RAS, que fassent entr'elles les directions XE, OF, prolongées des puissances E, F, la direction BH prolongée de la puissance H, ou de la résistance de l'appui B mis en sa place, passera toûjours par le sommet A de cet angle DAP ou RAS, à travers ce même angle suivant son plan.*

II. *Cette direction BH de la puissance H ou de l'appui B, sera aussi toûjours alors en ligne droite avec la direction de la force résultante* (princip. gener. & Lem. 2. 3.) *du concours d'action des puissances E, F; ou (ce qui revient au même) la direction de cette force résultante du concours de ces deux puissances E, F, passera toûjours alors du point A de concours de leurs directions, par l'appui B, ou suivant la direction BH de la puissance H, dont cet appui tient lieu* (Ax. 2.) *par sa résistance. Cette puissance H, ou cet appui B mis en sa place, sera aussi toûjours alors d'une résistance égale à la force résultante du concours d'action des deux autres puissances E, F.*

III. *En quelque raison que la direction BH prolongée de la puissance H, ou de la résistance de l'appui B mis à sa place, divise* (part. 1.) *l'angle DAP ou RAS compris entre les directions aussi prolongées des puissances E, F; si l'on imagine un parallelogramme RASG sur une diagonale quelconque AG prise depuis A dans l'angle RAS sur HA, ou BA prolongée de ce côté-là, lequel parallelogramme ait ses côtez AR, AS, sur les directions EX, FO, pareillement prolongées du même côté; la puissance H, ou la charge de l'appui B, résultante sur lui* (part. 2.) *du concours des puissances E, F, en cas d'équilibre sera à chacune des puissances E, F, comme la diagonale AG de ce parallelogramme RS, sera à chacun de ses côtez AR, AS, correspondans sur leurs directions.*

IV. *En ce même cas d'équilibre, si les puissances E, F, sont entr'elles comme les parties AR, AS, de leurs directions, & que de ces deux côtez AR, AS, on fasse un parallelogram-*

me RS ; la diagonale AG de ce parallelogramme passera toûjours suivant la direction prolongée BH de la puissance H, ou par l'appui B mis en sa place, si c'est sur cette puissance H, ou sur cet appui B, que ces deux puissances E, F, font équilibre ; & la puissance H, ou la charge de l'appui B mis en sa place, sera encore pour lors à chacune des puissances E, F, comme la diagonale AG du parallelogramme RS, est à chacun de ses côtez AR, AS, correspondans sur leurs directions.

V. *Reciproquement si la direction de la force résultante* (princ. gener. Lem. 2. 3.) *du concours des puissances E, F, passe par l'appui B, il y aura équilibre entre ces deux puissances sur cet appui mis à la place de la puissanceH ici retranchée.*

VI. *Pareillement si la diagonale AG prolongée du parallelogramme RS fait comme dans la part. 4. de côtez AR, AS, pris sur les directions des puissances E, F, en raison de ces mêmes puissances, passe par l'appui B ; ou (ce qui revient au même) si l'on met un appui B dans quelque point que ce soit de la rencontre de cette diagonale prolongée avec le Levier MN ; il y aura toûjours encore équilibre entre ces puissances E, F, sur cet appui B.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Le Corol. 14. du Lem. 3. fait voir qu'en cas d'équilibre entre les trois puissances E, F, H, appliquées (*Hyp.*) au corps MN, ou entre les deux premieres E, F, & l'appui B suppléant (*Ax.* 2.) la troisiéme H ; leurs trois directions XE, OF, BH, doivent passer le long d'un même plan, chacune à travers l'angle des deux autres, & par son sommet, lequel sera infiniment éloigné (*Lem.* 6. *Corol.* 1. 2.) si ces trois directions sont paralleles entr'elles. Donc en ce cas d'équilibre, quelque soit l'angle DAP ou RAS compris entre les deux premieres XE, OF, de ces trois directions prolongées ; la troisiéme BH de la puissance H, ou de la résistance de l'appui B, qui (*Ax.* 2.) la suppléeroit, passera toûjours par le sommet A de cet angle, à travers ce même angle suivant son plan. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

PART. II. Regardons pour un moment la puissance H oisive & sans action ; le nomb. 1. du Corol. 1. du Lem. 3. fera voir, comme on l'a déja vû dans la démonstration de la part. 2. du Th. 19. & ailleurs, que du concours d'action des puissances E, F, il doit résulter sur le Levier MN une nouvelle force suivant quelque ligne AG qui passe par la pointe A de l'angle RAS compris entre les directions de ces deux puissances, suivant laquelle ligne AG ce corps seroit ici pressé, poussé, ou tiré par le concours de ces deux puissances E, F, comme si au lieu de l'être ainsi par elles ensemble, il ne l'étoit suivant cette ligne AG que par une seule force égale à la résultante de leur concours ; & que ce corps ainsi pressé, poussé, ou tiré suivant cette ligne AG, se meuvroit effectivement (*Ax.* 1.) suivant cette direction de A vers G, si rien ne s'y opposoit. Donc n'y ayant ici (*Hyp.*) d'obstacle qu'en B, de la part de la puissance H remise en action suivant BH contre les deux autres E, F, ou de la part de l'appui B, qui mis à la place de cette puissance H, la supplée (*Ax.* 2.) par la résistance, non seulement cette direction AG de la force résultante du concours des puissances E, F, doit dans le cas d'équilibre ici supposé, se trouver effectivement (*Lem.* 3. *Corol.* 2. *nomb.* 1.) suivant BH, si c'est avec la puissance H que les puissances E, F, y demeurent en équilibre, ou passer (*princ. gener. Corol.* 2.) par l'appui B, si c'est sur cet appui que ces deux puissances demeurent ainsi en équilibre entr'elles ; mais encore cette force résultante de A vers G du concours de ces deux puissances E, F, doit alors (*Lem.* 3. *Corol.* 2. *nomb.* 3.) être égale à la résistance de cette puissance H, ou de l'appui B ; c'est-à-dire (*Lem.* 3. *Corol.* 2.) égale & directement opposée à cette résistance. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PART. III. Suivant cette précedente part. 2. l'on voit qu'en ce cas d'équilibre entre les trois puissances E, F, H, ou entre les deux premieres E, F, sur l'appui B, qui suppléeroit à la troisiéme H ; la force résultante du concours de ces deux puissances E, F, doit être égale

& directement opposée à la résistance que leur fait la puissance H, ou l'appui B mis à la place de cette puissance H; de sorte que BH étant (*Hyp.*) la direction de la résistance de la puissance H ou de l'appui B, cette force résultante du concours d'action des puissances E, F, contre cette résistance, doit en ce cas-ci d'équilibre, non seulement être égale à cette même résistance de la puissance H ou de l'appui B, mais encore être dirigée suivant HB en sens directement contraire à celui de cette résistance, qui est (*Hyp.*) suivant BH, c'est-à-dire (*part.* 2.) être dirigée suivant AB, ou (*constr.*) suivant la diagonale AG du parallelogramme RS, lequel ayant (*constr.*) les côtez AR, AS, sur les directions des puissances E, F, du concours desquelles cette force résulte, fait consequemment voir (*Lem.* 3. *Corol.* 1. *nomb.* 2.) que cette même force suivant AG, doit être ici à chacune des puissances E, F, comme cette diagonale AG est à chacun de ces côtez AR, AS, correspondans sur leurs directions. Donc la puissance H, ou la résistance de l'appui B mis en sa place, & par consequent aussi (*Déf.* 21. *Corol.*) la charge de cet appui, doit être ici à chacune des puissances E, F, (supposées en équilibre contre cette puissance H, ou sur cet appui B) comme la diagonale AG du parallelogramme RS est à chacun de ses côtez AR, AS, correspondans sur les directions de ces deux puissances E, F. *Ce qu'il falloit* 3°. *démontrer.*

PART. IV. Puisque (*Hyp.*) E.F :: AR. AS. la direction de la force résultante du concours de ces deux puissances E, F, doit être *Lem.* 3. *Corol.* 1. *nomb.* 1.) de A vers G suivant la diagonale AG du parallelogramme RS, ou (ce qui revient au même) cette diagonale AG doit être suivant cette direction de la force résultante du concours des puissances E, F. Or (*part.* 2.) en cas d'équilibre cette même direction doit être suivant BH ou passer par B. Donc en ce même cas d'équilibre ici supposé, la diagonale AG doit toûjours aussi être suivant BH, ou passer par B; & consequemment (*part.* 3.) la puissance

H, ou la charge de l'appui B mis en sa place, doit encore être ici à chacune des deux puissances E, F, (supposées en équilibre avec cette puissance H, ou sur cet appui B) comme la diagonale AG du parallelogramme RS, est à chacun de ses côtez AR, AS, qui leur répondent sur leurs directions. *Ce qu'il falloit 4°. démontrer.*

PART. V. Cette part. 5. se trouve démontrée dans le Corol. 1. du principe general, en ce que lorsque la direction de la force résultante du concours des puissances E, F, passe par l'appui B, la résistance invincible (*Hyp.*) de cet appui, que cette force trouve alors à son passage, quand elle tend vers lui, comme dans les Fig. 153. 155. 157. 159. 162. 164. 166. 167. ou quand il tire (pour ainsi dire) contr'elle, lorsqu'elle tend à s'en éloigner, comme dans les Fig. 154. 156. 158. 160. 161. 163. 165. doit l'arrêter tout court, & mettre ainsi (*Lem.* 3. *Corol.* 1. *nomb.* 4.) en équilibre entr'elles sur cet appui B les puissances E, F, sans qu'aucune d'elles puisse faire pancher le Levier MN d'aucun côté; puisque cette force résultante de leur concours, & ainsi arrêtée ou soûtenue toute entiere par l'appui, est (*Lem.* 3. *part.* 3. *& Corol.* 6.) tout ce que ces deux puissances E, F, font d'effort sur ce Levier MN. *Ce qu'il falloit 5°. démontrer, & ce qu'on verra encore l'être ci-après dans le Schol. du Th.*

PART. VI. Puisque les puissances E, F, sont ici entr'elles (*Hyp.*) comme les côtez AR, AS, du parallelogramme RS, suivant lesquels elles sont dirigées: la force résultante de leur concours sera (*Lem.* 3. *Corol.* 2. *nomb.* 1.) suivant la diagonale AG de ce parallelogramme. Donc cette diagonale prolongée passant (*Hyp.*) par l'appui B, il y aura encore ici équilibre (*part.* 5.) entre ces deux puissances E, F, sur cet appui B. *Ce qu'il falloit 6°. démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

Ce Th. 21. pourroit encore se démontrer par le Th. 1. en considerant le Levier MN comme un corps sans pesanteur, tiré avec des cordes par trois puissances E, F, H,

à la fois, ou comme un corps tiré par les deux premieres E, F, contre la troisiéme H qui lui tienne lieu de pesanteur, de même que si ce Levier MN étoit un poids de cette pesanteur H, soûtenu ou tiré avec des cordes XE, OF, par ces deux premieres puissances E, F. Suivant cela,

PART. I. La partie 1. du Th. 1. fera voir qu'en cas d'équilibre, la direction BH prolongée de la pesanteur ou puissance H, passera toûjours par le concours A des directions pareillement prolongées XE, OF, des puissances E, F; suivant leur plan, & à travers l'angle DAP ou RAS, que ces deux directions-ci prolongées font entre-elles, quel qu'il soit: de sorte qu'en imaginant au Levier MN un appui B, dont la résistance contre les puissances E, F, y supplée (*Ax.* 2.) celle de sa pesanteur ou puissance H, c'est-à-dire, dont la résistance & la direction soient les mêmes que celles de cette puissance ou pesanteur H de ce Levier; cette direction HB prolongée de cet appui B, ou de cette puissance H, passera encore (en cas d'équilibre) par le sommet A de l'angle DAP ou RAS compris entre les directions ainsi prolongées des puissances E, F, à travers de cet angle & suivant son plan. *Ce qu'il falloit encore* 1°. *démontrer.*

PART. II. La part. 2. du Th. 1. fait aussi voir qu'en ce cas d'équilibre cette direction BH de la puissance ou pesanteur H du Levier MN, sera toûjours en ligne droite avec celle de la force résultante du concours des puissances E, F. Donc en substituant encore un appui B dans la direction BH de cette pesanteur ou puissance H, au lieu d'elle, lequel (*Ax.* 2.) la supplée par sa résistance; la direction de la force résultante du concours des puissances E, F, passera aussi toûjours (en cas d'équilibre) par cet appui B. *Ce qu'il falloit encore* 2°. *démontrer.*

PART. III. La part. 3. du Th. 1. fait aussi voir qu'en ce même cas d'équilibre, la puissance ou pesanteur H du Levier MN, & consequemment aussi (*Ax.* 2.) la résistance de l'appui B mis en la place de cette puissance ou pesanteur H, doit toûjours être à chacune des puissances

E, F, comme la diagonale AG du parallélogramme RS, est à chacun de ses côtez AR, AS, correspondans sur les directions EX, FO, prolongées de ces puissances E, F. *Ce qu'il falloit encore 3°. démontrer.*

PART. IV. La part. 4. du Th. 1. fait pareillement voir qu'en ce cas d'équilibre, non seulement la direction de la force résultante du concours des puissances E, F, c'est-à-dire (*Lem.* 3. *Corol.* 1. *nomb.* 1.) la diagonale AG du parallelogramme RS, fait des côtez AR, AS, pris en raison de ces deux puissances sur leurs directions, passera toûjours suivant la direction BH de la puissance ou pesanteur H du Levier MN, & consequemment aussi par l'appui B, mais encore que la résistance de cette puissance ou pesanteur H, ou de l'appui B mis en sa place dans sa direction BH, doit alors être à chacune des puissances E, F, comme cette diagonale AG du parallelogramme RS est à chacun de ses côtez AR, AS, correspondans sur les directions de ces deux puissances E, F. *Ce qu'il falloit encore 4°. démontrer.*

Les part. 5. 6. de ce Théoreme-ci pourroient aussi se démontrer par la part. 6. du Th. 1. mais les démonstrations qui en résulteroient, ne seroient que celles-là mêmes qui seroient de ces deux part. 5. 6. dans la démonstration generale qui précede celle-ci, seulement plus longues & moins claires que celles-là par le tour qu'il faudroit prendre alors pour y revenir; c'est pour cela que nous ne nous y arrêterons pas davantage.

Nous ne parlerons pas non plus davantage de la puissance H qui, prise au hazard entre les trois puissances E, F, H, appliquées au Levier MN, en quelque ordre, & suivant quelques directions que ce soient, ne vient d'être employée que pour faire voir que l'appui B mis en sa place, c'est-à-dire, en son point d'application à ce Levier, résisteroit de même qu'elle aux deux autres puissances E, F, en équilibre entr'elles; & qu'un Levier quelconque pressé, poussé, ou tiré par deux puissances sur un appui placé à tel point qu'on voudra de ce Levier, revient toûjours à un qui le seroit par trois puissances, dont une quelconque seroit à la place de cet appui, & dont une quelconque

aussi

aussi agiroit seule contre les deux autres : pour faire voir, dis-je, qu'en quelque point d'application de ces trois puissances à un Levier, qu'on plaçât cet appui au lieu de celle qui y étoit appliquée, l'équilibre s'y feroit toûjours de même, & avec les mêmes rapports entre les deux puissances restantes, & la résistance de cet appui, qu'entre ces deux mêmes puissances & la troisiéme dont cet appui tiendroit la place ; & qu'ainsi la division ordinaire des Leviers en trois especes distinguées entr'elles par les differentes positions de cet appui & des deux puissances qu'il soûtient ; est aussi inutile pour avoir ces rapports, qu'on l'a cru necessaire pour passer de celui d'entre deux puissances en équilibre sur un appui entr'elles (qui étoit le seul qu'on y cherchât avant le Projet qui parut de ceci en 1687.) à celui d'entre deux puissances, dont l'une seroit entre l'autre & cet appui. Nous ne parlerons donc plus de la puissance H, mais seulement de l'appui B, qu'on vient de voir en faire la fonction contre les deux autres puissances E, F, en équilibre entr'elles.

AVERTISSEMENT.

Pour abreger nos expressions, nous appellerons dorénavant B, la charge ou (*Déf.* 21. *Corol.*) la résistance de l'appui de ce nom.

COROLLAIRE I.

En cas d'équilibre entre les puissances E, F, sur l'appui B, la diagonale AG du parallelogramme RS de la part. 4. fait des côtez AR, AS, pris en raison de ces deux puissances E, F, sur leurs directions, passant toûjours (*part.* 4.) par cet appui B ; il est visible que ce parallelogramme doit être le même que celui de la part. 3. fait sur cette diagonale AG prise sur AB, sans se mettre en peine du rapport de ses côtez AR, AS, supposez seulement sur les directions des puissances E, F ; & ainsi en ce cas d'équilibre le rapport de AR. AS : : E. F. supposé dans la part. 4. doit aussi se trouver dans la part. 3. Ce qui suit aussi de cette même & seule part. 3. puisque donnant E. B : : AR. AG. & B. F : : AG. AS. en cas d'équilibre,

elle doit aussi donner alors (en raison ordonnée) E. F::
AR. AS.

COROLLAIRE II.

Par consequent la diagonale AG prolongée passant toûjours (*part.* 3. 4.) par l'appui B en cas d'équilibre entre les puissances E, F, sur cet appui, si de ce même appui B on imagine les perpendiculaires BD, BP, sur les directions XE, OF, prolongées de ces deux puissances ; le Lem. 8. donnant AR. AS:: BP. BD. ce cas d'équilibre donnera aussi toûjours (*Corol.* 1.) E. F:: BP. BD. c'est-à-dire (*Déf.* 22.) que ces puissances E, F, seront toûjours alors entr'elles en raison reciproque de leurs distances BD, BP, à l'appui B de leur équilibre.

COROLLAIRE III.

Reciproquement si E. F:: BP. BD. il y aura équilibre entre ces deux puissances E, F, sur l'appui B : car si autour d'une diagonale quelconque AG prise depuis A vers G sur AB prolongée, on imagine un parallelogramme RS qui ait ses côtez AR, AS, sur les directions prolongées EX, FO, des puissances E, F, le Lem. 8. donnant alors BP. BD:: AR. AS. l'on aura aussi pour lors E. F:: AR. AS. Par consequent ces deux puissances E, F, seront alors (*part.* 6.) en équilibre entr'elles sur l'appui B.

FIG. 154. *C'est-là, suivant ce qu'on a rapporté de M. Fermat au commencement de cette Section-ci dans l'art.* 3. *du Schol. de la Déf.* 21. *ce que lui, M. Paschal, & M. de Roberval cherchoient dans le cas de la Fig.* 154. *en y prenant A pour le centre de la Terre, & les puissances E, F, pour des poids qui y tendent ; & comme les démonstrations précedentes conviennent à toutes sortes de Leviers, & à toutes sortes de directions des poids ou puissances qui y seront appliquées, au lieu du Levier droit MN de la Fig.* 154. *on peut prendre ici le circulaire ponctué XβBx concentrique à la Terre (auquel les puissances ou les poids E, F, de tendances à son centre A, seroient appliquées en X, x, & lui rencontré en B par la direction prolongée*

AG de l'effort résultant du concours de ces poids ou puissances) ainsi que faisoient Messieurs de Fermat, Paschal & de Roberval, pour arriver (à ce qu'ils croyoient) plus aisément au but où ils tendoient, comme si la figure du Levier, & la varieté des directions des poids ou puissances, y faisoient quelque chose. Les proprietez que ces Messieurs y cherchoient, sont ici démontrées de ce Levier circulaire XβBx chargé sur son appui B de puissances ou de poids tendans à son centre A, comme de tout ce qu'on y voit d'autres Leviers; sçavoir, que E.F :: BP. BD. dans ce Levier circulaire ainsi chargé, comme dans tous ceux-là. M. de Roberval, qui parloit pour lui, & pour M. Paschal contre M. de Fermat, arriva pourtant à cette proprieté pour ces directions requises de poids tendans au centre A de la Terre, en démontrant (comme Archimede) le rapport de deux puissances de directions paralleles, en équilibre sur un Levier droit d'un appui posé entr'elles, & en passant ensuite de ces directions paralleles aux concourantes. Mais M. de Fermat s'opposoit à ce passage, quoiqu'il admît ce principe d'Archimede pour les directions paralleles, & que pour le faire servir aux directions concourantes, M. de Roberval n'y employât que les suppositions qu'on y employe encore tous les jours; marque que ces suppositions, quoique vrayes, ne sont pas assez claires pour être admises aussi gratuitement qu'on les fait.

COROLLAIRE IV.

Si les puissances E, F, au Levier MN, n'y faisoient point équilibre entr'elles sur son appui B, & que ce fût, par exemple, la puissance E qui l'emportât sur la puissance F; il est visible que la puissance E seroit alors plus grande, ou la puissance F plus petite qu'il ne faudroit pour faire équilibre entr'elles suivant leurs directions; & consequemment (*Corollaire* 2.) qu'on auroit alors E.F > BP. BD. FIG. 153. & suivantes jusqu'à 167.

COROLLAIRE. V.

Reciproquement si E.F > BP. BD. il n'y aura point d'é-

quilibre entre les puiſſances E, F, ſur l'appui B, & ce ſera E qui l'emportera ſur la puiſſance F; puiſque s'il y avoit équilibre entr'elles, l'on auroit alors (*Corol.* 2.) E. F :: BP. BD. Et ſi c'étoit F qui l'emportât ſur E, l'on auroit auſſi pour lors (*Corol.* 4.) E. F < BP. BD. Ce qui l'un & l'autre ſeroit contre l'hypotheſe. Donc ſi E. F > BP. BD. il n'y aura point d'équilibre entre les puiſſances E, F, ſur l'appui B. On démontrera de même qu'il n'y en auroit pas non plus ſi F. E :: BD. BP. & que ce ſeroit alors F qui l'emporteroit ſur E.

De ces Corollaires ſuit la raiſon de la force des Ciſeaux, des Pincettes, des Tenailles, & de ſemblables Machines. Car ce ſont autant de Leviers, ou plûtôt de doubles Leviers dans chacun de ces inſtrumens, dont le clou qui en lie les deux Leviers enſemble, eſt le centre ou l'appui commun de ces deux Leviers; & parce que les branches qu'on tient à la main, ſont plus longues que les ſerres, auſſi la force qu'on applique à ces branches qui en ſont comme les diſtances à l'appui, y a un bien plus grand effet par rapport à ce qu'on pince dans les ſerres, & ce d'autant plus grand que ces branches ſont plus longues que ces ſerres.

COROLLAIRE VI.

Le Corol. 2. donnant E. F :: BP. BD. en cas d'équilibre entre les puiſſances E, F, ſur l'appui B; & le Corol. 4. donnant E. F > BP. BD. en cas de non équilibre, & que ce fût la puiſſance E qui l'emportât ſur la puiſſance F, l'on aura E×BD=F×BP dans le premier cas, & E×BD > F×BP dans le ſecond; c'eſt-à-dire (*Déf.* 22.) que les *Momens* ſeront égaux entr'eux dans le premier cas, & le *Moment* de la puiſſance E plus grand que celui de la puiſſance F dans le ſecond.

COROLLAIRE VII.

Le Corol. 3. fait reciproquement voir que les puiſſances E, F, ſeront en équilibre entr'elles ſur l'appui B, ſi les *Momens* en ſont égaux entr'eux, c'eſt-à-dire (*Déf.* 22.)

si ExBD=FxBP; puisqu'alors on auroit E. F :: BP. BD. auquel cas le Corol. 3. fait voir qu'il y auroit équilibre entre les puissances E, F, sur l'appui B.

COROLLAIRE VIII.

Le Corol. 5. fait reciproquement voir que les puissances E, F, ne seront point en équilibre entr'elles sur l'appui B, si les *Momens* en sont inégaux, & que ce sera la puissance E qui l'emportera sur la puissance F, si le *Moment* de la premiere est plus grand que celui de la seconde, c'est-à-dire (*Déf.* 22.) si ExBD > FxBP; puisqu'on auroit alors E. F > BP. BD. auquel cas le Corol. 5. fait voir qu'il n'y auroit point d'équilibre entre les puissances E, F, sur l'appui B.

COROLLAIRE IX.

Il suit des précedens Corol. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. que le degré ou la quantité d'action ou d'impression (*Momentum*) d'une puissance sur un Levier, ne se prend pas seulement de la grandeur de sa force employée, mais aussi de sa distance de sa ligne de direction au point d'appui du Levier sur lequel elle agit : de sorte que le produit de cette distance par la force employée de cette puissance, est la mesure de son action, ou de l'impression (*Momentum*) qu'elle fait sur ce Levier. D'où l'on voit que lorsque plusieurs puissances ou poids font équilibre entr'eux sur un appui de Levier : il faut que les sommes de ces produits ou *Momens* antagonistes soient égales de part & d'autre de l'appui; & reciproquement que si ces deux sommes sont égales entr'elles, tous ces poids ou puissances demeureront en équilibre sur cet appui. Cela se verra encore autrement dans le Corol. 1. du Th. 25.

COROLLAIRE X.

Ce Corol. 9. fait aussi voir qu'en quelque point d'un Levier qu'une puissance lui soit appliquée, pourvû que

la distance de la ligne de direction de cette puissance au point d'appui de ce Levier soit toûjours la même ; son action ou impression (*Momentum*) sur ce Levier sera aussi toûjours la même.

Par la même raison, si differentes puissances égales agissoient successivement suivant la même direction, ou suivant des directions également distantes du point d'appui du Levier auquel elles seroient appliquées ; leurs actions ou impressions (*Momenta*) sur ce Levier seroient aussi égales ; & consequemment (*Corol.* 5.) il y auroit alors équilibre entr'elles.

COROLLAIRE XI.

Si presentement on prend pour sinus total la droite AB menée de l'appui B du Levier MN au concours A des directions EX, FO, prolongées des puissances E, F, appliquées en X, O, à ce Levier ; les perpendiculaires BD, BP, menées de cet appui B sur ces directions, se trouvant alors être (*Déf.* 9.) les sinus des angles BAE, BAF, de chacune de ces mêmes directions avec la droite AB, ce qu'on voit de ces perpendiculaires BD, BP, dans les Corol. 2. 3. 4. 5. est pareillement vrai des sinus de ces deux angles BAE, BAF : sçavoir,

1°. Qu'en cas d'équilibre entre les puissances E, F, sur l'appui B, ces deux puissances E, F, seront toûjours alors entr'elles (*Corol.* 2.) en raison reciproque des sinus de ces angles BAE, BAF, compris entre chacune des directions de ces puissances & la droite AB.

2°. Reciproquement que si ces deux puissances E, F, appliquées au Levier MN, y sont entr'elles en ce rapport, il y aura pour lors (*Corol.* 3.) équilibre entr'elles sur cet appui B.

3°. Que si les puissances E, F, appliquées au Levier MN, n'y faisoient point équilibre entr'elles sur l'appui B, & que ce fût, par exemple, la puissance E qui l'emportât sur la puissance F, cette puissance E seroit alors (*Corol.* 4.)

à cette puissance F en plus grande raison que le sinus de l'angle BAF au sinus de l'angle BAE.

4°. Reciproquement, que si la puissance E étoit à la puissance F en plus grande raison que le sinus de l'angle BAF au sinus de l'angle BAE, cette puissance E l'emporteroit (*Corol.* 5.) sur la puissance F, de maniere qu'il n'y auroit point alors d'équilibre entr'elles.

COROLLAIRE XII.

Soit *b* le point où la droite XO est rencontrée par la diagonale AG prolongée de part où d'autre jusqu'à elle, & que les angles *b*XA, *b*OA, des directions des puissances E, F, avec cette droite XO, soient égaux entr'eux: les Corol. 2. 3. font voir que si ces deux puissances ainsi appliquées au Levier MN, sont en équilibre entr'elles sur son appui B, elles seront alors entr'elles en raison reciproque des bras *b*X, *b*O, d'un Levier droit XO, dont l'appui seroit en *b*; c'est-à-dire, qu'on auroit alors E. F :: *b*O. *b*X. Et reciproquement que si ces deux puissances sont entr'elles en cette raison, elles seront aussi en équilibre entr'elles sur cet appui B ou *b*. Car en menant *bd*, *bp*, perpendiculaires aux directions XE, OF, prolongées de ces deux puissances E, F, & consequemment (*Cor.* 2.) paralleles à BD, BP, chacune à chacune;

1°. Dans les Fig. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. où les angles (*Hyp.*) égaux *b*XA, *b*OA, rendent le triangle XAO isoscelle; les triangles *bd*A, *bp*A, ainsi faits semblables aux triangles BDA, BPA, chacun à chacun, de même que les semblables entr'eux *bd*X, *bp*O, donneront BP. BD :: *bp*. *bd* :: *b*O. *b*X. Donc en cas d'équilibre sur l'appui B, l'on aura ici (*Corol.* 2.) E. F :: *b*O. *b*X. Et reciproquement si ces deux puissances E, F, sont entr'elles en cette raison, il y aura ici (*Cor.* 3.) équilibre entr'elles sur l'appui B. FIG. 153. & suivantes jusqu'à 162.

2°. Dans les Fig. 163. 164. 165. 166. 167. où les angles (*Hyp.*) égaux *b*XA, *b*OA, rendroient les droites EX, FO, & consequemment aussi (*Lem.* 6. *Corol.* 1. 2.) BA, FIG. 163. & suivantes jusqu'à 167.

toutes trois paralleles entr'elles : ce qui rendant semblables les triangles *bd*X, *bp*O, & égales deux à deux, les perpendiculaires comprises entre BA, & chacune des deux autres EX, EO de ces trois paralleleles, sçavoir, *bd*=BD, & *bp*=BP; l'on auroit encore ici, comme dans le nomb. 1. BP. BD :: *bp*. *bd* :: *b*O. *b*X. Donc aussi en cas d'équilibre entre les puissances E, F, sur l'appui B, l'on auroit ici (*Corol.* 2.) E. F :: *b*O. *b*X. Et reciproquement si ces deux puissances E, F, étoient entr'elles en cette raison, il y auroit ici (*Corol.* 3.) équilibre entr'elles sur l'appui B.

COROLLAIRE XIII.

FIG. 153. 154. 163. 164. Si presentement on suppose que sur un Levier droit MN d'un appui B posé dans sa direction, tel que dans les Fig. 153. 154. 163. 164. les directions des puissances E, F, sont paralleles entr'elles : les bras BX, BO, de ce Levier étant alors (*Déf.* 22.) les distances elles-mêmes de son appui B aux directions EX, FO, de ces deux puissances, ou en raison de ces distances, selon que ces directions paralleles EX, FO, seront perpendiculaires, ou non, à ce Levier droit MN : les Corol. 2. 3. font voir que si ces deux puissances E, F, sont entr'elles en raison reciproque de ces bras BX, BO, du Levier, c'est-à-dire, si E. F :: BO. BX. il y aura pour lors équilibre entr'elles sur l'appui B; & reciproquement que si avec de telles directions sur un Levier droit, elles sont en équilibre entr'elles, elles seront aussi pour lors en ce rapport. Tout cela suit aussi du précedent Corol. 12.

C'est-là ce qu'on appelle d'ordinaire le premier principe de Mécanique, *excepté M. Descartes, & Varron Jurisconsulte Genevois, lesquels ont pris tous deux pour ce premier principe,* qu'il ne faut ni plus ni moins de force pour lever un corps pesant à une certaine hauteur, que pour en lever un autre moins pesant à une hauteur d'autant plus grande, qu'il est moins pesant, ou en lever un plus pesant à une hauteur d'autant moindre. *C'est ainsi que parle M. Des-*

cartes

cartes dans ses Lettres, Tom. I. Lett. 73. *Voici presentement comment parle Varron dans la pag.* 23. *de son Traité* De Motu, *imprimé à Geneve en* 1584. *chez Jacques Stoer:* Tantum enim est libram unam quatuor spatiis moveri, quantum libras quatuor uno spatio eodem tempore. *Cet Auteur dit aussi dans la pag.* 22. Si enim tanta sit tarditas motûs vis unius, respectu motûs vis alterius, quanta est proportio vis illius ad hanc, non fiet motus. *Ce qui est aussi le principe de Galilée, lequel principe revient à l'autre, ou l'autre à lui; puisque dans les Machines les espaces sont toûjours comme les vitesses.*

Au reste, tout cela suit si naturellement de notre Ax. 1. *connu de tout le monde, qu'il n'a pas été necessaire que Galilée ni Descartes ayent ici rien emprunté de Varron, ni Descartes de Galilée. Aussi n'est-ce que pour indiquer ce principe, & pour rendre justice à tous les trois, qu'on rapporte ici ce qu'ils en ont dit.*

COROLLAIRE XIV.

Il suit du précedent Corol. 13. que dans la supposition qu'on fait d'ordinaire des directions paralleles des poids appliquez à une Balance ou à une Romaine, mobiles en B l'une & l'autre par rapport à leur anse BH; les poids E, F, en équilibre aux extrêmitez M, N, des bras égaux BM, BN, d'une Balance representée dans la Fig. 169. y doivent être égaux entr'eux; & qu'en équilibre à l'extrêmité M d'un des bras BM de la Romaine representée dans la Fig. 170. & au point quelconque O de son autre bras BN, ces deux poids doivent être entr'eux en raison reciproque des distances BM, BO, où ils se trouvent alors du point B. Ce qui fait voir l'utilité de la Balance pour peser des poids égaux, & de la Romaine pour en peser d'inégaux quelconques E contre un Peson F toûjours le même, mobile le long d'un bras BN: des poids E, dis-je, d'autant plus grands que la longueur du bras BN l'est davantage par rapport à l'autre bras BM, & que le Peson F peut s'éloigner davantage de l'appui ou de l'essieu B de la Romaine. FIG. 169. 170.

Pour la sûreté de ces Machines à peser, il y a des précautions à prendre dans leur construction & dans leur usage : on en parlera dans la suite.

COROLLAIRE XV.

Fig. 153. & suivantes jusqu'à 162.

Quelques soient les directions des puissances quelconques E, F, il suit aussi des part. 5. 6. que dans les Leviers des Figures marquées ici en marge, dans lesquelles la diagonale AG prolongée du parallelogramme RS, passe dans l'angle XAO compris entre les directions de ces puissances ; cette diagonale prolongée passant toûjours par quelque point de ces Leviers, quelqu'en soient les figures & les longueurs, il y aura toûjours quelque point B, sçavoir, celui de leur rencontre avec cette diagonale prolongée, sur lequel appuyez ou soûtenus, ces deux puissances E, F, pourront toûjours demeurer en équilibre entr'elles, quelque rapport qu'elles ayent l'une & l'autre, & quelqu'en soient les directions.

COROLLAIRE XVI.

Fig. 163. 164. 165. 166. 167.

Il n'en va pas de même des autres Leviers des Figures marquées pareillement ici en marge, dans lesquelles la diagonale AG, quelque prolongée qu'elle soit, ne passe point dans l'angle XAO, mais dans son complement à deux droits. Car cette diagonale AG, quelque prolongée qu'elle soit, pouvant ne point rencontrer ces Leviers, faute d'être assez long ou de figure qui le permette, & même ne pouvant jamais les rencontrer, quelques longs qu'ils soient, lorsqu'ils sont droits, comme dans les Fig. 163. 164. & que les puissances E, F, qui leur sont appliquées, sont entr'elles en raison reciproque des sinus des angles de leurs lignes de direction avec ces Leviers, & rendant ainsi la diagonale AG parallele à ces mêmes Leviers ; tous ces Leviers peuvent être de figure ou de longueur à n'avoir jamais chacun aucun point sur lequel appuyé il puisse soûtenir les puissances E, F, en équilibre entr'elles, & même les droits, quelques longs qu'ils soient,

ne peuvent jamais avoir un tel point d'appui, lorsque ces puissances y sont entr'elles dans la raison précedente.

COROLLAIRE XVII.

Ainsi en general lorsque deux puissances E, F, étant données avec leurs directions, & la position MN du Levier auquel elles sont appliquées, on demande le point d'appui B de ce Levier, sur lequel ces deux puissances demeureroient en équilibre entr'elles; il n'y a qu'à prolonger la diagonale AG du parallelogramme RS fait (comme ci-dessus) de côtez AR, AS, pris en raison de ces deux puissances E, F, sur leurs directions depuis le point de concours de ces mêmes directions: si cette diagonale AG prolongée rencontre le Levier MN, leur point de rencontre sera (*part.* 5. 6.) celui de l'appui cherché; & si elle ne peut le rencontrer, ce Problême sera (*principe gener. Corol.* 2.) impossible. FIG. 153. & suivantes jusqu'à 167.

COROLLAIRE XVIII.

Il suit encore des part. 5. 6. conformément aux Corol. 14. 15. que les deux mêmes puissances quelconques E, F, peuvent faire successivement équilibre sur une infinité de points d'appui B d'un même Levier MN, en changeant seulement leurs directions; puisqu'on les peut varier en tant de manieres que la diagonale AG prolongée passera successivement par tous les points imaginables de ce même Levier, excepté par les points X, O, où ces deux puissances lui sont appliquées.

COROLLAIRE XIX.

Il suit aussi du nomb. 1. du Corol. 11. que si un poids E est appliqué en X à un Levier XB avec plusieurs puissances F, F, de directions differentes, capables de le soûtenir chacune suivant sa direction particuliere XF sur l'appui B de ce Levier; & que si après avoir mené d'un point A quelconque de la direction XA du poids E, la droite AZ parallele à BX menée de cet appui B au point FIG. 168.

d'application X, quelque soit la figure de ce Levier, on prolonge toutes les directions FX, FX, jusqu'à la rencontre M, M, de cette droite AZ; chaque ligne XM exprimera la puissance F, dont elle sera la direction, & toutes les XM toutes les puissances F capables chacune de soûtenir le même poids E dans la même situation XB du Levier sur son appui B.

Car le nomb. 1. du Corol. 11. fait voir que chaque puissance F capable de soûtenir suivant sa direction XF sur l'appui B du Levier XB, doit être à ce poids comme le sinus de l'angle BXA est au sinus de l'angle BXF, ou (à cause de AZ supposée parallele à BX) comme le sinus de l'angle XAM est au sinus de l'angle XMA correspondans; & par consequent aussi (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) comme chaque XM est à XA. Donc toutes les XM seront ici entr'elles comme toutes les puissances F capables d'y soûtenir le même poids E chacune suivant la direction de chaque XM correspondantes. Donc aussi,

1°. Lorsque la direction XF d'une de ces puissances F sera en ligne droite avec XA du côté opposé; XM se trouvant alors égale à XA, cette puissance F sera aussi pour lors égale au poids E.

2°. Si l'angle BXF du côté de F se trouve égal à l'angle BXA, la puissance F se trouvera encore alors égale au poids E; puisque les paralleles AZ, BX, qui rendent les angles XMA=BXF, XAM=BXA, rendroient XMA=XAM, & consequemment XM=XA.

3°. Donc (*nomb.* 1.) les puissances F pourroient avoir deux directions, sçavoir, celles des nomb. 1. 2. suivant lesquelles elles devroient chacune être égale au même poids E pour le soûtenir en équilibre sur l'appui B du Levier BX.

4°. Lorsque XF se trouvera confondue avec XB parallele (*Hyp.*) à AZ, la prolongation de XM parallele aussi pour lors à AZ, se trouvant alors infinie par rapport à XA; la puissance F qui auroit cette direction, devroit aussi être infinie par rapport au poids E pour pouvoir ici le soûtenir sur l'appui B.

COROLLAIRE XX.

Si l'on imagine presentement differens poids E, soûtenus sur l'appui B du Levier XB par une puissance F suivant differentes directions XF; le nomb. 1. du Corol. 11. fait encore voir que tous ces differens poids E, capables d'être ainsi successivement soûtenus par une même puissance F, seront entr'eux comme les sinus des angles BXF faits des XB avec les directions correspondantes XF de cette puissance.

Car ce nomb. 1. du Corol. 11. fait voir qu'en cas d'équilibre cette puissance F doit être à chaque poids E, qu'elle soûtiendroit ainsi; comme le sinus de l'angle (*Hyp.*) constant BXE seroit au sinus de chaque angle BXF que la direction XF suivant laquelle cette puissance F soûtiendroit ce poids E, feroit avec XB. Donc tous ces differens poids E seroient ici entr'eux comme les sinus des angles correspondans BXF. Donc aussi,

1°. Tant que la puissance F soûtiendra le poids E suivant une direction XF directement opposée à celle XE de ce poids, l'angle BXF se trouvant alors complement (à deux droits) de l'angle BXE, & les sinus de ces deux angles étant ainsi (*Déf. 9. Corol. 2.*) égaux ou le même; le poids E sera aussi pour lors égal à la puissance F, ainsi qu'on l'a déja vû dans le nomb. 1. du Corol. 19.

2°. Si l'angle BXF du côté de F, se trouve égal à BXE, le poids E sera encore ici égal à la puissance F; ainsi que dans le nomb. 2. du précedent Corol. 19.

3°. Donc (*nomb. 1.*) la puissance F pourroit avoir deux directions differentes, sçavoir, celles des nomb. 1. 2. suivant lesquelles elle pourroit soûtenir des poids égaux sur l'appui B du Levier XB; ce qui revient aussi au nomb. 3. du Corol. 19.

4°. Si la direction XF de la puissance F, se trouvoit confondue avec XB, l'angle BXF se trouvant alors nul ou zero, & consequemment aussi son sinus, le poids E seroit aussi pour lors nul par rapport a cette puissance F,

c'est-à-dire, absolument zero, si cette puissance F étoit finie; ou elle infinie, si ce poids étoit fini. Ce qui revient pareillement au nomb. 4 du Corol. 19.

COROLLAIRE XXI.

Fig. 153. & suivantes jusqu'à 167. Puisqu'en general dans le cas d'équilibre sur l'appui B de quelque Levier MN que ce soit, entre deux puissances quelconques E, F, la résistance ou la charge de cet appui B est toûjours (*part.* 3. 4.) à chacune de ces deux puissances E, F, comme la diagonale AG du parallelogramme RS est à chacun de ses côtez AR, AS, correspondans sur leurs directions prolongées EX, FO; c'est-à-dire (à cause de AS=GR) comme le côté AG du triangle AGR est à ses deux autres côtez AR, GR; l'on aura (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) cette résistance ou charge de l'appui B à chacune de ces deux puissances E, F, comme le sinus de l'angle ARG, ou de son complement RAS, est à chacun des sinus des angles AGR ou GAS, & GAR; c'est-à-dire, la résistance ou la charge de l'appui B, & les puissances E, F, alors entr'elles comme les sinus des angles RAS, GAS, GAR, ou (à cause que les angles XAO, BAO, BAX, leur sont égaux ou complemens à deux droits) comme les sinus des angles XAO, BAO, BAX.

COROLLAIRE XXII.

Donc le sinus de chacun des trois angles RAS, GAS, GAR, ou XAO, BAO, BAX, étant toûjours (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) moindre que la somme des deux autres, tant que l'angle XAO, que font entr'elles les directions des puissances E, F, est fini, les sinus des autres l'étant aussi pour lors, à cause que leur sommet commun A n'est alors qu'à une distance finie du Levier MN; la charge de l'appui B, résultante du concours de ces puissances E F, en équilibre (*Hyp.*) sur lui, sera pour lors (*Cor.* 21.) moindre que la somme de ces deux mêmes puissances sur quelque Levier que ce soit, & chacune de ces deux puissances toû-

jours aussi moindre que la somme faite de l'autre & de la charge de l'appui B.

COROLLAIRE XXIII.

Mais si l'angle XAO, que font entr'elles les directions des puissances E, F, est infiniment aigu, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol. 2.*) si ces directions EX, FO, sont paralleles entr'elles, ou confondues en une qui passe par l'appui B.

1°. Dans tous les Leviers MN, dont l'appui B est dans cet angle XAO, ou dans son opposé au sommet, & dont cet appui B se trouveroit entre les directions des puissances E, F, devenues paralleles entr'elles, ou entre les points X, O, de leur application au Levier suivant des directions qui passent toutes deux par son appui; l'angle RAS s'y trouvant aussi pour lors infiniment aigu, & le total de GAS, GAR, son sinus seroit égal (*Lem. 7.*) à la somme des sinus de ces deux autres. Par consequent alors (*Cor. 21.*) la charge de l'appui B, résultante du concours d'action des puissances E, F, en équilibre (*Hyp.*) sur lui, est aussi toûjours égale à la somme de ces deux puissances, tant que leurs directions y sont paralleles entr'elles, ou (*Lem. 6. Corol. 2.*) que l'angle XAO compris entre leurs directions EX, FO, est infiniment aigu. FIG. 153. & suivantes jusqu'à 162.

2°. Au contraire dans tous les Leviers MN dont l'appui B est hors de l'angle XAO, ou de son opposé au sommet, & cet appui B auroit d'un seul côté les directions des puissances E, F, devenues ici (*Lem. 6. Corol. 2.*) paralleles entr'elles par la supposition qu'on y fait de l'angle XAO infiniment aigu; son complement RAS se trouvant alors (*Déf. 11. Corol.*) infiniment obtus, & total encore de GAS, GAR, dont le premier GAS seroit au contraire alors infiniment aigu, le sinus de cet angle total RAS ne seroit ici égal (*Lem. 7. Corol. 2.*) qu'à la difference dont le sinus de son angle partial GAR surpasseroit le sinus de son autre partial GAS. Par consequent (*Corol. 21.*) la charge de l'appui B, résultante du concours d'action des FIG. 163. & suivantes jusqu'à 167.

puissances E, F, en équilibre (*Hyp.*) sur lui, n'est ici égale non plus qu'à la difference dont la puissance F y surpasse la puissance E, tant que les directions de ces deux puissances sont paralleles entr'elles.

COROLLAIRE XXIV.

Fig. 153. 154. 155. &c. Il en va tout autrement, lorsque l'angle XAO devient infiniment obtus, c'est-à-dire (*Déf.* 11.) obtus jusqu'à rendre les directions EX, FO, des puissances E, F, en une seule ligne droite XO, qui passe par leurs points X, O, d'application au Levier MN, & par son appui B, sur lequel ces deux puissances ainsi dirigées, sont ici supposées en équilibre entr'elles, soit que ce Levier soit droit comme dans les Figures ici marquées, ou que courbe à volonté, il ait son appui dans cette droite XO.

Fig. 153. 154. &c. 1°. Dans les Leviers MN qui ont leur appui B sur cette droite XO entre les points X, O, d'application des puissances E, F, à chacun de ces Leviers ; l'angle XAO, qu'on suppose ici infiniment obtus, rendant aussi l'angle total RAS infiniment obtus, avec un de ses partiaux GAR, GAS, infiniment aigu ; le sinus de cet angle total RAS n'y sera égal (*Lem.* 7. *Corol.* 2.) qu'à la difference des sinus de ces deux angles partiaux GAR, GAS. Par consequent (*Corol.* 21.) la charge de l'appui B, résultante du concours des puissances E, F, en équilibre (*Hyp.*) sur lui, & dirigées ici en sens contraires suivant la droite XO, dans laquelle on le suppose, ne sera plus ici égale qu'à la difference de ces deux puissances : de sorte que si ces deux puissances étoient égales entr'elles, la charge de l'appui B en seroit ici entierement nulle ou zero.

De ce que les puissances E, F, sont ici directement contraires, le seul Ax. 5. fait voir que la charge de l'appui B y sera égale à la difference de ces deux puissances E, F, & dans le sens de la plus forte.

Fig. 153. 154. &c. 2°. Au contraire dans les Leviers MN, dont l'appui B, placé sur la droite XO, n'y est point entre les points X, O, d'application

d'application à chacun de ces Leviers ; l'angle XAO, qu'on suppose ici infiniment obtus, rendant son complement RAS (*Cor. Déf.* 11.) infiniment aigu, le sinus de cet angle total RAS sera ici égal (*Lem.* 7.) à la somme des sinus de ses deux angles partiaux GAR, GAS. Par consequent (*Corol.* 21.) la charge de l'appui B, résultante du concours des deux puissances E, F, en équilibre (*Hyp.*) sur lui, & dirigées ici en même sens suivant la droite XO, dans laquelle on le suppose, sera ici égale à la somme de ces deux puissances E, F.

De ce que ces deux puissances E, F, sont ici dirigées en même sens suivant la même droite XO, le seul Ax. 4. fait voir que la charge qui en résulte ici à l'appui B, doit être égale à leur somme, & dirigée en même sens qu'elles suivant leur direction commune XO.

L'angle XAO supposé infiniment aigu dans le Corol. 23. confondant quelquefois dans le nomb. 2. du Corol. 23. les directions EX, FO, des puissances E, F, en une suivant la droite XO, qui passe par leurs points X, O, d'application au Levier MN ; & cet angle XAO supposé infiniment obtus dans le Corol. 25. les y confondant toûjours ; on a supposé par tout là que cette direction commune XO passoit par l'appui B sur lequel on y supposoit ces deux puissances en équilibre entr'elles : parce que si cet appui B étoit hors cette droite XO prolongée, comme dans les Fig. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 165. 166. 167. cet équilibre entre les deux puissances E, F, de directions ainsi confondues en une, ne pourroit être (Corol. 7.) *à moins que ces deux puissances ne fussent directement contraires & égales entr'elles ; auquel cas ces deux puissances se soûtiendroient mutuellement* (Ax. 3.) *sans aucune résistance de la part de l'appui B.*

COROLLAIRE XXV.

La charge de l'appui B de quelque Levier MN que ce soit, démontrée dans les précedens Corol. 21. 22. 23. 24. par le moyen des sinus des trois angles RAS, GAS, GAR, ou des trois XAO, BAO, BAX, de mêmes sinus FIG. 153. & suivantes jusqu'à 167.

que ceux-là, peut encore se démontrer par le moyen du parallelogramme RS construit comme dans les part. 3. 4. dans lesquelles il revient (*Corol.* 1.) au même.

En effet chacune de ces deux part. 3. 4. fait voir qu'en cas d'équilibre entre deux puissances quelconques E, F, sur l'appui B de quelque Levier MN que ce soit, auquel elles soient appliquées en X, O, suivant quelques directions XE, OF, que ce soient aussi; la charge de cet appui B, résultante du concours d'action de ces deux puissances E, F, sur lui, doit toûjours être à chacune d'elles, comme la diagonale AG du parallelogramme RS est à chacun de ses côtez AR, AS, correspondans sur leurs directions; ou (à cause de AS=RG) comme le côté AG du triangle ARG est à chacun de ses deux autres côtez AR, RG; & consequemment que cette charge de l'appui B est toûjours moindre que la somme de ces deux puissances E, F, tant qu'elles font équilibre entr'elles sur cet appui, & que les angles de ce triangle ARG ou du parallelogramme RS sont finis, c'est-à-dire, tant que les directions EX, FO, prolongées de ces deux puissances E, F, font entr'elles un angle fini XAO, ainsi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 22.

COROLLAIRE XXVI.

Fig. 153. & suivantes jusqu'à 162. Mais lorsque cet angle XAO est infiniment aigu, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol.* 1. 2.) lorsque les directions EX, FO, des puissances E, F, sont paralleles entr'elles, ou confondues en une qui passe par l'appui du Levier MN.

1°. Dans tous les Leviers MN, dont l'appui B est dans cet angle XAO, ou dans son opposé au sommet, & dont cet appui B se trouveroit entre les directions des puissances E, F, devenues ici paralleles entr'elles, ou entre les points X, O, d'application de ces puissances au Levier lorsque ces deux points X, O, sont en ligne droite avec son appui B, l'angle RAS du parallelogramme RS, s'y trouvant aussi pour lors infiniment aigu, la diagonale AG de ce parallelogramme RS se trouve alors (*Lem. 9. part.* 1.)

égale à la somme de ses côtez AR, AS. Donc la charge de l'appui B, résultante du concours des puissances E, F, en équilibre (*Hyp.*) sur lui, se trouve aussi pour lors (*part.* 3. 4.) égale à la somme de ces deux puissances, ainsi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 23. nomb. 1.

2°. Au contraire dans tous les Leviers dont l'appui B est hors de l'angle XAO, ou de son opposé au sommet, & dont cet appui B auroit d'un seul côté les directions des puissances E, F, devenues ici (*Lem.* 6. *Corol.* 1. 2.) paralleles entr'elles par la supposition qu'on y fait de l'angle XAO infiniment aigu; son complement RAS se trouvant alors (*Déf.* 11.) infiniment obtus, la diagonale AG du parallelogramme RS ne se trouve plus alors (*Lem.* 9. *part.* 2.) égale qu'à la difference de ses côtez AR, AS. Donc la charge de l'appui B, résultante du concours des puissances E, F, en équilibre (*Hyp.*) sur lui, ne se trouve aussi pour lors égale qu'à la difference de ces mêmes puissances, ainsi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 23. nomb. 2. FIG. 163. 164. 165. 166. 167.

COROLLAIRE XXVII.

C'est tout le contraire, lorsque l'angle XAO est infiniment obtus, c'est-à-dire (*Lem.* 6. *Corol.* 4.) lorsque les directions XE, OF, des puissances E, F, sont en ligne droite XO, qui passe par leurs points X, O, d'application au Levier MN, & que cette droite XO passe par l'appui B, sur lequel ces deux puissances ainsi dirigées, sont ici supposées en équilibre entr'elles. Car, FIG. 153. 154. &c.

1°. Dans les Leviers qui ont leur appui B sur cette droite XO entre les points X, O, d'application des puissances E, F, à ces Leviers, l'angle XAO, qu'on suppose ici infiniment obtus, rendant aussi infiniment obtus l'angle RAS du parallelogramme RS, la diagonale AG de ce parallelogramme ne sera pour lors (*Lem.* 9. *part.* 2.) égale qu'à la difference de ses côtez AR, AS. Donc aussi la charge de l'appui B, résultante du concours des puissances E, F, en équilibre entr'elles (*Hyp.*) sur lui, ne FIG. 153. 154. &c.

ſera non plus alors (*part.* 3. 4.) qu'égale à la difference de ces mêmes puiſſances, ainſi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 24. nomb. 1.

Fig. 163. 164. &c. 2°. Au contraire dans les Leviers dont l'appui B placé ſur la droite XO, n'y eſt point entre les points X, O, d'application des puiſſances E, F, à ces Leviers, l'angle XAO, qu'on ſuppoſe ici infiniment obtus, rendant au contraire ſon complement RAS infiniment aigu; la diagonale AG du parallelogramme RS, fait ſous cet angle RAS, ſera pour lors (*Lem.* 9. *part.* 1.) égale à la ſomme de ſes côtez AR, AS. Donc auſſi la charge de l'appui B, réſultante du concours des puiſſances E, F, en équilibre (*Hyp.*) ſur lui, ſera pour lors (*part.* 3. 4.) égale à la ſomme de ces deux puiſſances, ainſi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 24. nomb. 2.

COROLLAIRE XXVIII.

Fig. 153. & ſuivantes juſqu'à 167. La charge de l'appui B de quelque Levier MN que ce ſoit, démontrée dans les précedens Corol. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. peut encore ſe démontrer autrement, en ſuppoſant BD, BP, PT, perpendiculaires en D, P, Q, aux trois directions AX, AO : AB, & qui par leur rencontre entr'elles forment le triangle BPT. Car ce triangle ayant (*Lem.* 8. *Corol.* 8.) les trois côtez BT, BP, PT, entr'eux comme les ſinus des angles BAO, BAX, XAO, au travers deſquels, ou des complemens deſquels ces directions prolongées paſſeroient, l'on aura auſſi (*Cor.* 21.) en cas d'équilibre entre les puiſſances E, F, ſur l'appui B d'un Levier quelconque MN, la charge de cet appui B, & ces deux puiſſances E, F, entr'elles comme les trois côtez PT, BT, BP, de ce triangle BPT, perpendiculaires (*Hyp.*) aux directions de cette charge & de ces deux puiſſances.

COROLLAIRE XXIX.

Par conſequent chacun de ces trois côtez du triangle BPT, étant toûjours moindre que la ſomme des deux au-

tes, tant que l'angle XAO est fini, tous les siens l'étant aussi pour lors; la charge de l'appui B, résultante du concours des puissances E, F, en équilibre entr'elles (*Hyp.*) sur lui, sera pareillement alors (*Corol.* 28.) toûjours moindre que la somme de ces deux puissances, & chacune d'elles toûjours moindre aussi que la somme faite de l'autre puissance & de cette charge, ainsi qu'on l'a déja vû dans les Corol. 22. 25.

COROLLAIRE XXX.

Mais si l'angle XAO se trouve infiniment aigu par l'éloignement infini de son sommet A; c'est-à-dire (*Lem.6. Corol.* 1. 2.) si les directions XE, OF, des puissances E, F, sont paralleles entr'elles, & consequemment aussi à la droite BA; cet éloignement infini du point A, rendant pareillement les angles BAX, BAO, infiniment aigus, les trois perpendiculaires (*Hyp.*) BD, BP, PT, à ces trois paralleles XE, OF, BA, seront alors sur une même ligne droite; & consequemment aussi les trois côtez BT, BP, PT, du triangle BPT, parties de ces perpendiculaires, ou ces perpendiculaires elles-mêmes, seront aussi sur une même ligne droite perpendiculaire à ces trois paralleles; de maniere que,

1°. Dans les Leviers qui auront leur appui B dans l'angle XAO, ou dans son opposé au sommet, les deux côtez BT, BP, seront alors bout à bout sur le troisiéme PT, confondu avec eux & égal à leur somme par l'arrivée de son point Q en B. Cela seroit aussi par le nomb. 1. du Corol. 3. du Lem. 9. en ce que l'angle XAO (*Hyp.*) infiniment aigu, rend son complement PBD ou PBT infiniment obtus dans le triangle PBT, ce nomb. 1. du Corol. 3. du Lem. 9. fait voir qu'alors son côté PT opposé à cet angle infiniment obtus, sera égal à la somme de ses deux autres côtez BT, BP. Donc la charge de l'appui B, résultante du concours des puissances E, F, en équilibre (*Hyp.*) sur lui, sera pour lors (*Corol.* 28.) égale à la somme de ces deux puissances dans les Leviers dont l'appui sera FIG. 153. & suivantes jusqu'à 162.

dans l'angle XAO, ainsi qu'on l'a déja vû dans le nomb. 2. des Corol. 23. 26.

Fig. 163. 164. 165. 166. 167. 2°. Dans les Leviers qui auront leur appui B au dehors de l'angle XAO, ou de son opposé au sommet, le cas present de cet angle XAO infiniment aigu, ou (*Lem.* 6. *Corol.* 1. 2.) des directions AX, AB, AO, paralleles entr'elles, rendant bout à bout les deux côtez BT, PT, du triangle BPT sur son troisiéme BP alors confondu avec eux & égal à leur somme par l'arrivée de leur concours T sur lui, Q arrivant aussi pour lors en B, & consequemment le côté PT sera pour lors égal à la difference des deux autres. Cela seroit aussi par le nomb. 2. du Corol. 3. du Lem. 9. en ce que l'angle infiniment aigu XAO, rendant aussi infiniment aigus les angles OAB, PBT, BPT, & le triangle PBT se trouvant alors avoir deux angles infiniment aigus en B, P, & un infiniment obtus en T; ce nomb. 2. du Corol. 3. du Lem. 3. fait voir qu'alors le côté BT de ce triangle sera égal à la difference de ses deux autres côtez BP, PT. Donc la charge de l'appui B, résultante du concours des puissances E, F, en équilibre (*Hyp.*) sur lui, sera pour lors (*Corol.* 28.) égale à la difference de ces deux puissances dans les Leviers dont il s'agit ici, ainsi qu'on l'a déja vû dans les nomb. 2. des Corol. 23. 26.

COROLLAIRE XXXI.

Fig. 153. 154. 163. 164. &c. Au contraire, lorsque l'angle XAO est infiniment obtus, c'est-à-dire (*Lem.* 6. *Corol.* 4.) lorsque les directions XE, OF, des puissances E, F, font la ligne droite XO, qui passe par leurs points X, O, d'application au Levier MN, & que cette droite XO passe par l'appui B, sur lequel ces deux puissances ainsi dirigées sont supposées en équilibre entr'elles. Alors,

Fig. 153. 154. &c. 1°. Dans les Leviers qui ont leur appui B dans l'angle XAO, sur la droite XO, entre les points X, O, d'application des puissances E, F, à chacun de ces Leviers, l'angle XAO, que l'on suppose devenir infiniment obtus,

rendant ainsi (*Déf.* 11. *Corol.*) son complement PBD ou PBT infiniment aigu, & les deux autres angles en P, T, du triangle BPT, un encore infiniment aigu, & l'autre infiniment obtus; le nomb. 2. du Corol. 3. du Lem. 9. fait voir que le côté PT de ce triangle BPT, seroit pour lors égal à la difference de ses deux autres côtez BP, BT. Cela seroit encore en considerant que lorsque l'angle PBT est infiniment aigu, ses côtez, BP, BT, se couchent (*Lemme* 6. *Corol.* 3.) l'un sur l'autre, & le troisiéme côté PT du triangle BPT sur l'excès du plus grand de ces deux-là, desquels par consequent ce troisiéme PT ne doit être alors que la difference. Donc (*Corol.* 28.) dans ces sortes de Leviers la charge de l'appui B, résultante du concours des puissances E, F, supposées entre-elles en équilibre sur lui suivant des directions qui feroient entr'elles un angle XAO infiniment obtus, ne seroit alors égale qu'à la difference de ces deux puissances, ainsi qu'on l'a déja vû dans les nomb. 1. des Corol. 24. 27.

2°. Dans les Leviers qui ont leur appui B au dehors de l'angle XAO, sur la droite XO, ayant d'un seul côté les points X, O, d'application des puissances E, F, à chacun de ces Leviers, l'angle XAO, que l'on suppose devenir infiniment obtus, rendant ainsi l'angle PBT infiniment obtus par les positions perpendiculaires en B de BP au dessous, & de BT au dessus de XO prolongée, & les deux autres angles en P, T, du triangle BPT, infiniment aigus; le nomb. 1. du Corol. 3. du Lem. 9. fait voir que le côté PT de ce triangle BPT, seroit pour lors égal à la somme de ces deux autres côtez BT, BP. Donc (*Cor.* 28.) dans ces sortes de Leviers la charge de l'appui B, résultante du concours des puissances E, F, supposées entre-elles en équilibre sur lui suivant des directions qui feroient entr'elles un angle XAO infiniment obtus, seroit alors égale à la somme de ces deux puissances, ainsi qu'on l'a déja vû dans les nomb. 2. des Corol. 24. 27. FIG. 163. 164. &c.

COROLLAIRE XXXII.

Suivant quelques directions EX, FO, que les puissances E, F, appliquées en X, O, à quelque Levier MN que ce soit, fassent équilibre entr'elles sur son appui B placé où l'on voudra ; il suit des précedens Corol. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. que la plus grande charge qui en puisse résulter à cet appui B, c'est (*nomb.* 1. *des Corol.* 23. 24. 26. *& nomb.* 2. *des Corol.* 24. 27. 31.) d'être égale à la somme de ces deux puissances ; & que la moindre c'est (*nomb.* 1. *des Corol.* 24. 27. 31. *& nomb.* 2. *des Corol.* 23. 24. 26.) d'être égale à leur difference ; sçavoir, l'une & l'autre de ces deux charges de l'appui B, lorsque les directions des puissances E, F, sont paralleles entr'elles ou en ligne droite, qui passe par cet appui conformément à la réflexion qui suit le Corol. 24. Quant aux autres directions de ces deux puissances E, F, les Corol. 22. 25. 29. font voir chacun que la charge qui en résultera à l'appui B, sur lequel on les suppose en équilibre entr'elles, est toûjours moyenne entre ces deux extrêmes, c'est-à-dire, toûjours moindre que la somme de ces deux puissances, & toûjours plus grande que leur difference ; & ce d'autant plus grande que l'angle RAS se trouve plus aigu, la diagonale AG du parallelogramme RS en étant d'autant plus grande par rapport à ses côtez AR, AS, & cette charge étant alors (*part.* 3. 4.) aux puissances E, F, comme cette diagonale AG est à ces mêmes côtez AR, AS.

COROLLAIRE XXXIII.

Fig. 163. 164. &c. Lorsque les directions XE, OF, des puissances E, F, sont en ligne droite XO, dans laquelle prolongée se trouve l'appui B du Levier auquel on les suppose appliquées ; non seulement la résistance (*Hyp.*) invincible de cet appui alors directement opposé à chacune de ces puissances, les met toûjours (*princ. gener. Corol.* 1. en équilibre ou en

repos

pos sur lui, quelque rapport qu'elles ayent entr'elles; mais encore,

1°. Si c'est par la réduction de l'angle XAO à l'infiniment aigu, que les directions XE, OF, des puissances E, F, se confondent ainsi en une suivant XO par l'appui B; la charge de cet appui est alors égale (*nomb.* 1. *des Corol.* 23. 26. 30.) à la somme de ces deux puissances, quand cet appui B est entre leurs points X, O, d'application au Levier, comme dans les Fig. 153. 154. & seulement égale (*nomb.* 2. *des Corol.* 23. 26. 30.) à leur difference, quand il n'y est pas, comme dans les Fig. 163. 164. aussi ces deux puissances E, F, agissent-elles sur cet appui B en même sens dans le premier cas, & en sens directement contraire dans le second.

2°. Si c'est par la réduction de l'angle XAO à l'infiniment obtus, que les directions XE, OF, des puissances E, F, se confondent en une suivant XO qui passe par l'appui B; la charge de cet appui n'est égale (*nomb.* 1. *des Corol.* 24. 27. 31.) qu'à la difference de ces deux puissances, quand cet appui B est entre leurs points d'application X, O, comme dans les Fig. 153. 154. & égale (*nomb.* 2. *des Corol.* 24. 27. 31.) à leur somme, quand il n'y est pas, comme dans les Fig. 163. 164. Aussi ces deux puissances E, F, sont-elles ici directement contraires dans le premier cas, & en même sens dans le second.

COROLLAIRE XXXIV.

Suivant le Corol. 28. les puissances E, F, dirigées à volonté, & en équilibre entr'elles sur l'appui B d'un Levier quelconque MN, sont alors entr'elles comme les côtez BT, BP, qui leur répondent dans le triangle BPT, c'est-à-dire alors, E. F :: BT. BP. Mais le Corol. 2. donne aussi pour lors E. F :: BP. BD. Donc en cas d'équilibre dans toutes sortes de Leviers, & de directions de puissances, on a toûjours BT. BP :: BP. BD. Par consequent en menant la droite DP, les triangles PBT, DBP, qui ont l'angle commun en B, sont toûjours alors semblables en- | FIG. 153. & suivantes jusqu'à 167.

V u

tr'eux ; & consequemment les trois côtez DP, BP, BD, du second DBP de ces triangles, sont toûjours alors entr'eux comme les trois côtez PT, BT, BP, qui leur sont homologues dans le premier PBT. Or en ce cas d'équilibre des puissances E, F, sur l'appui B, la charge qui en résulte à cet appui, & ces deux puissances E, F, sont toûjours entr'elles (*Corol.* 28.) comme les trois côtez PT, BT, BP, de ce triangle PBT. Donc cette charge de l'appui B, & ces deux puissances E, F, seront toûjours aussi pour lors entr'elles comme les trois côtez DP, BP, BD, du triangle DBP, qui n'a que deux côtez BD, BP, perpendiculaires (*Corol.* 2.) à deux EX, FO, des trois directions EX, FO, AB, des puissances E, F, & de la charge de l'appui B, résultante du concours d'action de ces deux puissances sur lui, au lieu que (*Corol.* 28.) l'autre triangle PBT a ses trois côtez BT, BP, PT, perpendiculaires à ces trois directions.

On voit que toutes les differentes valeurs de charges d'appuis de Leviers quelconques déterminées depuis le Corol. 21. jusqu'ici, pour toutes les directions possibles des puissances en équilibre sur eux deux à deux de directions quelconques, pourroient encore se déterminer par le moyen du triangle DBP, comme l'on a fait par le moyen de son semblable PBT dans les Corol. 28. 29. 30. 31. Mais en voilà assez, & peut-être trop pour la quantité ou valeur de ces sortes de charges. Voici presentement quelles en sont les directions, c'est-à-dire, en quel sens, ou vers quels côtez les appuis des Leviers en sont chargez.

COROLLAIRE XXXV.

On a vû dans les démonstrations des part. 2. 3. 4. qu'en cas d'équilibre entre deux puissances quelconques E, F, sur un appui de quelque Levier que ce soit, auquel ces deux puissances seroient appliquées en deux points X, O, aussi quelconques suivant quelques directions EX, FO, que ce fussent ; la charge de cet appui B, résultante du concours d'action de ces deux puissances,

doit toûjours être de A vers G ſuivant la diagonale AG, d'un parallelogramme RS fait de côtez AR, AS, pris ſur les directions de ces puiſſances, laquelle diagonale AG prolongée paſſe par l'appui B. Donc,

1°. En general, quelque ſoit l'angle XAO compris entre ces directions prolongées EX, FO, des puiſſances E, F, en équilibre entr'elles (*Hyp.*) ſur l'appui B; la droite menée du ſommet A de cet angle par cet appui B, ſera la direction de ſa charge de A vers G, réſultante du concours de ces deux puiſſances. Donc auſſi en particulier,

2°. Lorſque cet angle XAO ſera infiniment aigu, c'eſt-à-dire (*Lem.* 6. *Corol.* 1. 2.) lorſque les directions EX, FO, des puiſſances E, F, ſeront paralleles entr'elles, ou confondues en une, qui paſſe par l'appui B; cette direction AB de la charge de cet appui B, encore de A vers G, ſera auſſi parallele à celles-là (*Lem.* 6. *Corol.* 1. 2.) ou confondue avec elles, & dans le ſens de ces deux puiſſances E, F, ſi elles tirent vers le même côté, ou dans le ſens de la plus voiſine de cet appui, ſi elles tirent vers des côtez differens.

3°. Lorſque l'angle XAO ſera infiniment obtus, c'eſt-à-dire (*Lem.* 6. *Corol.* 4.) lorſque les directions EX, FO, des puiſſances E, F, ſeront auſſi en ligne droite XO, qui paſſe par leurs points X, O, d'application au Levier MN, & par l'appui B (*Ax.* 5.) de chacun des Leviers ſur leſquels l'équilibre ici ſuppoſé ſeroit alors poſſible ſur cet appui: la direction AB de la charge de A vers G de ce même appui B, ſe trouvera pour lors (*Lem.* 6. *Cor.* 3. 4.) confondue dans cette même droite XO avec les directions EX, FO, de ces deux puiſſances E, F, & dans le ſens (*Ax.* 5.) de la plus forte d'entr'elles, ſi elles ſont contraires l'une à l'autre, ou dans le ſens de toutes les deux, ſi elles s'accordent à tirer vers le même côté.

COROLLAIRE XXXVI.

Il ſuit preſentement des Corol. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. qu'en cas d'é-

quilibre ſur l'appui B d'un Levier quelconque MN, entre deux puiſſances auſſi quelconques E, F, appliquées à quelques points X, O, qu'on voudra de ce Levier, & dirigées auſſi comme l'on voudra.

1°. Tant que l'angle XAO compris entre leurs directions EX, FO, prolongées ſera fini, la direction de la charge réſultante du concours d'action de ces deux puiſſances E, F, ſur l'appui B de ce Levier, ſera (*Corol.* 35. *nomb.* 1.) de A vers G ſuivant AB; & cette charge ſera toûjours alors (*Corol.* 32.) moyenne entre la ſomme de ces deux puiſſances & leur difference; c'eſt-à-dire, toûjours moindre que leur ſomme; & toûjours plus grande que leur difference, & ce d'autant plus grande (*Cor.* 25.) que l'angle RAS (égal à XAO, ou à ſon complement) ſera plus grand.

2°. Lorſque l'angle XAO eſt infiniment aigu; c'eſt-à-dire (*Lem.* 6. *Corol.* 1. 2.) lorſque les directions EX, FO, des puiſſances E, F, ſont paralleles entr'elles ou confonducs en une, qui paſſe par l'appui B, la direction de la charge réſultante du concours d'action de ces deux puiſſances ſur cet appui B de leur équilibre ſuppoſé, ſera encore (*Corol.* 35. *nomb.* 2.) de A vers G ſuivant AB alors parallele à leurs directions EX, FO, ou confondues avec elles en une, qui paſſera (*Ax.* 5.) par l'appui B; & ſoit que ces directions des puiſſances E, F, ſoient paralleles entr'elles, ou confondues en une, qui paſſe par cet appui B, ſa charge ſera toûjours alors (*nomb.* 1. *des Corol.* 23. 26. 30.) égale à la ſomme de ces deux puiſſances E, F, ſi cet appui B eſt entre leurs directions ou entre leurs points X, O, d'application au Levier, & ſeulement égale à leur difference (*nomb.* 2. *des Corol.* 23. 26. 30.) lorſqu'il n'y eſt pas.

3°. Lorſque l'angle XAO eſt infiniment obtus, c'eſt-à-dire (*Lem.* 6. *Corol.* 4.) lorſque les directions EX, FO, des puiſſances E, F, ſont en ligne droite XO, qui paſſe par les points X, O, d'application de ces deux puiſſances au Levier MN, & par l'appui B (*Ax.* 5.) de tous les Le-

...rs dans lesquels l'équilibre supposé entre ces deux puissances E, F, seroit alors possible sur cet appui B ; la charge résultante de leur concours d'action sur ce même appui B de leur équilibre supposé, aura (*Lem.* 6. *Cor.* 3. 4.) sa direction confondue dans XO avec les leurs, dans le sens de la plus forte d'entr'elles (*Ax.* 5.) si elles sont contraires l'une à l'autre, & sera pour lors égale (*Corol.* 24. *nomb.* 1.) à leurs differences ; ou si ces deux puissances E, F, s'accordent à tirer vers le même côté, cette charge de l'appui B aura pour lors (*Lem.* 9. *Corol.* 2.) sa direction vers ce côté-là dans le sens de toutes ces deux puissances, & sera pour lors (*Corol.* 24. *nomb.* 2.) égale à leur somme.

En 1687. que le Projet de ceci fut publié, personne (que je sçache) n'avoit encore démontré la charge ni la direction des points d'appuis des Leviers : il ne paroit pas même qu'il soit aisé de le faire par les principes ordinaires, où l'on ne conclud l'équilibre entre deux puissances ou deux poids appliquez à un Levier, que de leur égale opposition à être circulairement enlevez l'un par l'autre autour de l'appui fixe de ce Levier ; au lieu que c'est de leur accord & de leur réunion d'action sur cet appui que l'on conclud ici cet équilibre entr'eux sur ce même appui : consideration qui renferme necessairement celle de la charge & de la direction de cet appui, lesquelles n'entrent point du tout dans les principes ordinaires. Cependant sans la connoissance de cette charge & de cette direction des appuis des Leviers, il y a bien des Problêmes qu'on ne sçauroit résoudre : par exemple, sans la connoissance de la direction des appuis il n'est pas possible de démontrer quelles devroient être les directions de deux puissances quelconques pour faire équilibre entr'elles sur quelque Levier que ce soit, dont l'appui seroit une sphère ; *ni* sur combien de points de ce Levier ainsi appuyé, il seroit possible que ces mêmes puissances fissent équilibre en changeant seulement leurs directions. *Il n'est pas possible non plus, sans la connoissance de la direction & de la charge des appuis des Leviers de* trouver le point d'appui de celui auquel tant de puissances qu'on voudra soient appliquées, pour toutes

les directions possibles dans lesquelles on les peut supposer ; *ni* deux puissances étant données avec leurs directions & leurs points d'application à un Levier, de trouver quelle doit être la direction & point d'application d'une troisiéme puissance aussi donnée, pour que toutes trois ensemble fassent équilibre entr'elles sur quelque point donné que ce soit de ce Levier, & pour quelque direction que ce soit de ce point d'appui. *Il en sera de même de toute autre puissance sur les Leviers dont la solution dépendra de la détermination de la charge & de la direction des appuis.*

Depuis 1687 *que cette réflexion fut faite dans le Projet de ceci, il a paru une Mécanique, dans laquelle, après avoir démontré que deux poids en équilibre sur un Levier droit perpendiculaire aux directions de ces poids qu'on y suppose paralleles entr'elles, & d'un appui posé entr'eux, sont toûjours l'un à l'autre en raison reciproque des bras de ce Levier auquel ces deux poids sont ainsi appliquez ; & après avoir passé de-là aux autres Leviers, & aux autres directions des puissances qui y sont appliquées : on est enfin arrivé par des substitutions & par des transformations de Leviers, à des raisons composées, qui ont enfin donné celle qui se presente tout d'un coup ici* (Corol. 25.) *& dans le Projet de ceci* (pag. 61. Corol. 4.) *de la charge de l'appui à chacune des deux puissances qu'il soûtient en équilibre entr'elles. Ce qui justifie ce que l'on vient de dire au commencement de cette réflexion-ci, comme on l'avoit déja dit dans la pag. 64. du Projet de ceci:* qu'il ne paroît pas aisé de démontrer la charge ni la direction des points d'appuis des Leviers par les principes ordinaires : *choses qu'on vient de voir sauter aux yeux, & s'offrir d'elles-mêmes comme consequences immédiates du principe qu'on suit ici.*

COROLLAIRE XXXVII.

Si l'on suppose presentement que tous les points de chaque corps sont chacun d'une pesanteur par tout la même, à quelque distance qu'il se trouve du centre de la Terre ;

auquel toutes ces pesanteurs tendent toûjours, & que ce corps s'en approche ou s'en éloigne en se meuvant toûjours parallelement à lui-même, c'est-à-dire, sans tourner aucunement sur lui-même, & en gardant toûjours une même situation de tous ses points par rapport à ce centre de la Terre : les part. 3. 4. font voir que ce corps pesera d'autant moins qu'il sera plus près de ce même centre.

Car si dans les Fig. 154. 156. 158. 160. les pesanteurs des points X, O, d'un corps quelconque MN, sont representées par des puissances E, F, égales à ces pesanteurs, & dirigées comme elles au centre de la Terre, lequel soit ici A; les part. 3. 4. font, dis-je, voir que la charge ou pesanteur qui en résultera à ce corps MN, sera à chacune des puissances E, F, ou des pesanteurs qu'elles expriment dans les points X, O, comme la diagonale AG du parallelogramme RS, est à chacun de ses côtez AR, AS, pris sur les directions de ces puissances en même raison qu'elles. Or il est manifeste qu'à mesure que le corps MN, mû parallelement à lui-même, approchera du point fixe A, plus l'angle RAS augmentera, & plus au contraire la diagonale AG du parallelogramme RS diminuera, ses côtez AR, AS, demeurant toûjours les mêmes. Donc aussi plus ce corps MN, toûjours parallele à lui-même, approchera de ce centre A de la Terre, moins sera grande la charge ou la pesanteur qui lui résultera du concours de celles de ses points X, O, vers le point A. La même chose se démontrera de tous les autres points de ce corps quelconque MN, ainsi pris deux à deux. Donc tout ce corps, toûjours (*Hyp.*) en même situation de ses parties par rapport au centre A de la Terre, quoiqu'à differentes distances de ce centre, recevra d'impression ou de pesanteur vers ce même centre par le concours des pesanteurs constantes de tous les points ou parties toûjours tendantes (*Hyp.*) à ce centre A, sera toûjours d'autant moindre, c'est-à-dire, qu'il sera toûjours d'autant moins pesant, quoiqu'en raison differente,

Fig. 154. 156. 158. 160.

qu'il sera plus près de ce même centre ; sa situation ou disposition par rapport à ce centre, demeurant du reste toûjours la même. Ainsi une sphere ayant toûjours même situation de toutes ses parties par rapport au centre de la Terre, quelque tour qu'elle fasse sur elle-même, devroit toûjours être, suivant ceci, d'autant moins pesante qu'elle en seroit plus près.

COROLLAIRE XXXVIII.

Mais si la situation des parties du corps MN tout autre que spherique, changeoit par rapport au centre de la Terre, en faisant quelque mouvement autour d'un de ses points quelconques B ; quand même ce point B demeureroit à même distance BA du centre A de la Terre, ce corps MN ne laisseroit pas d'en devenir plus leger ou plus pesant, selon que les angles XAO ou RAS, faits des directions concourantes des pesanteurs particulieres & constantes de ses points pris deux à deux, en deviendroient plus grands ou plus petits. Tout cela suit encore des part. 3. 4. de même que le précedent Corol. 37.

COROLLAIRE XXXIX.

Au contraire, si au lieu de directions concourantes des poids, on les suppose à l'ordinaire paralleles entre-elles, & les points de ces corps encore de pesanteurs toûjours les mêmes dans chacun d'eux, à quelques distances qu'ils se trouvent du centre de la Terre, ou de tout autre point auquel on supposât que chacun de ces poids tendent ; les nomb. 1. des Corol. 23. 26. font voir que ces poids entiers seront aussi pour lors chacun de même pesanteur à toute distances de ce centre, quelque situation qu'ils prennent par rapport à lui : puisque suivant ces nomb. 1. des Corol. 23. 26. la pesanteur ou la charge de chacun de ces poids, résultante du concours des pesanteurs particulieres de toutes ses parties, seroit alors égale à la somme de toutes les pesanteurs particulieres, lesquelles supposées constantes, la rendroient aussi

par

partout la même, & d'une direction toûjours (*Corol.* 35. *nomb.* 2.) parallele aux leurs.

COROLLAIRE XL.

De cette hypothese des directions des poids paralleles entr'elles, & des pesanteurs toûjours les mêmes dans chacune de leurs parties ou points, & consequemment aussi (*Corol.* 39.) de leurs pesanteurs entieres toûjours les mêmes à toutes sortes de distances de la Terre ou de son centre; deux de ces poids quelconques E, F, appliquez en X, O, à un Levier quelconque MN, qui n'en auroit aucune, & en équilibre sur un appui B posé entr'eux dans un point commun à ce Levier & à la droite XO, qui joint aussi leurs points d'application à ce Levier, demeureroient toûjours en équilibre sur cet appui B, quelque varieté de situation *mn* qu'on donnât ensuite à ce Levier, les directions *ex*, *fω*, des poids E, F, alors en *e*, *f*, y étant encore paralleles entr'elles. FIG. 171.

Car puisque les directions EX, FO, *ex*, *fω*, sont (*Hyp.*) toutes paralleles entr'elles, si l'on mene par l'appui B la droite DP perpendiculaire aux deux premieres EX, FO, en D, P, elle le sera aussi aux deux autres *ex*, *fω*, en *d*, *p*; & les triangles tant BDX, BPO, que B*dx*, B*pω*, seront ici semblables entr'eux. Donc B*p*. B*d* :: B*ω*. B*x* :: BO. BX :: BP. BD. Or l'équilibre supposé entre les poids E, F, sur l'appui B dans la premiere situation MN du Levier, donne (*Corol.* 2.) BP. BD :: E. F (*Hyp.*) :: *e*. *f*. Donc aussi *e*. *f* :: B*p*. B*d*. Par consequent (*Corol.* 3.) ces deux poids E, F, en *e*, *f*, dans toute autre situation *mn* que la premiere supposée MN de ce Levier, y resteront toûjours aussi en équilibre sur le même appui B.

Donc dans cette hypothese des directions des poids paralleles entr'elles, deux quelconques de pesanteurs constantes une fois en équilibre sur un Levier aussi quelconque MN, dont l'appui B soit dans la droite XO, qui joint leurs points X, O, d'application à ce Levier, demeureront toûjours en équilibre sur cet appui, quelque

varieté de situations *mn* qu'on donne à ce Levier : c'est-à-dire, dans toutes les situations possibles de ce même Levier.

La même chose se trouvera encore démontrée d'une autre maniere dans le Corol. 6. du Th. 23.

COROLLAIRE XLI.

Ainsi le point B, qui (*Corol.* 23.) divise la droite DP, & consequemment aussi le Levier droit XO, en bras reciproques aux poids E, F, appliquez à leurs extrêmitez, sera ici (*Déf.* 14.) le centre de gravité du Levier droit XO ainsi chargé en X, O, des poids E, F, de pesanteurs (*Hyp.*) constantes, & de directions (*Hyp.*) paralleles entr'elles ; & consequemment (*Corol.* 35. *nomb.* 2.) la direction de ce centre de gravité ou de sa charge doit être suivant la droite BG parallele à celles-là, & cette charge (*nomb.* 1. *des Cor.* 23. 26. 30.) doit être égale à la somme de ces poids.

COROLLAIRE XLII.

Suivant cela, si l'on imagine un corps ou poids quelconque soûtenu en repos par un de ses points aussi quelconque, la direction de sa pesanteur résultante du concours des pesanteurs particulieres de toutes les parties, passant toûjours (*part.* 2.) par ce point d'appui ou de suspension, suivant une ligne (*Corol.* 35. *nomb.* 2.) parallele aux directions (*Hyp.*) paralleles entr'elles de toutes ces pesanteurs particulieres, & cette pesanteur totale du corps en question se trouvant ainsi toute réunie dans cette ligne d'équilibre, comme si elle seule l'avoit toute entiere ; celui des points mitoyens de cette ligne, sur lequel appuyé ou suspendu elle demeureroit en équilibre ou en repos, sera aussi celui sur lequel le corps ou le poids entier demeureroit de même en équilibre ou en repos. Or les pesanteurs particulieres de toutes les parties de cette ligne, étant (*Hyp.*) toûjours ici les mêmes pour chacune, & de directions toutes paralleles entr'elles ; l'équilibre de cette

même ligne se conserveroit toûjours sur ce point (*Corol.* 40.) quelque situation qu'on donnât à cette ligne autour de cet appui. Donc l'équilibre du corps ou du poids se conserveroit aussi toûjours ici sur ce point dans toutes les situations possibles qu'on pourroit donner à ce corps autour de ce même appui. Par consequent dans tous les points où toutes les parties auroient des pesanteurs par tout les mêmes pour chacune, & toûjours dirigées suivant des lignes toutes paralleles entr'elles, il y auroit toûjours un point par où ce corps étant suspendu ou appuyé, toutes ses parties demeureront toûjours en repos, quelque situation qu'on leur donnât par rapport au lieu vers lequel il tendroit. C'est ce point qu'on appelle d'ordinaire (*Déf.* 14.) le *centre de gravité* de ce corps ou de ce poids.

On verra dans le Corol. 8. du Th. 23. qu'un tel centre de gravité se trouveroit aussi dans les poids de directions concourantes au centre de la Terre, pourvû que leurs parties soient ainsi dirigées par des pesanteurs proportionnelles dans chacune aux differentes distances d'elles à ce centre. Mais si avec de telles directions les pesanteurs en étoient constantes & toûjours les mêmes, on va voir dans le Corol. 45. de ce Théoreme-ci qu'un tel poids n'auroit point de tel centre de gravité.

COROLLAIRE XLIII.

Si presentement on suppose que les directions des poids ou des parties de chacun, concourent en quelque point, par exemple, au centre de la Terre, & que leurs pesanteurs soient encore par tout les mêmes pour chacun d'eux à toutes distances de ce centre; il arrivera le contraire du Corol. 40. supposé dans le précedent Corol. 42. c'est-à-dire, que ces poids ne pourront être en équilibre deux à deux sur un même point d'appui d'un Levier posé entre leurs points d'application à ce Levier dans la droite qui joindra ces deux points, que dans une seule situation de ce même Levier, au lieu que suivant le Corol. 40. cet équilibre se conserveroit dans toutes les situations possi-

bles de ce Levier, si ces poids avoient des directions toûjours paralleles entr'elles.

Fig. 171. Pour voir le premier comme l'on a déja vû le second dans le Corol. 40. soient deux poids quelconques E, F, de pesanteurs constantes, & constamment dirigées vers le point A, qui soit (si l'on veut) le centre de la Terre; lesquels poids soient appliquez à deux points quelconques X, O, du Levier MN de figure quelconque, & en équilibre entr'eux dans la situation MN de ce Levier sur un appui B placé (comme dans le Corol. 40.) entre ces deux points d'application dans un qui soit commun au Levier & à la droite XO qui joint ces deux-là. Si l'on change cette situation MN de ce Levier en telle autre *mn* qu'on voudra, quelque soit le bras abaissé Bx par rapport à l'élevé Bω, ces deux poids E, F, alors en *e*, *f*, n'y seront plus en équilibre sur l'appui B; au contraire l'abaissé en *e* vers A, emportera toûjours l'autre, jusqu'à ce que la droite XO, ou $x\omega$, qui joint leurs points d'application à ce Levier, soit dans la droite BA menée de l'appui B au centre A de la Terre, sçavoir, X ou x en R, & O ou ω en S plus éloigné que R du point A.

Car si du point B on imagine BD, BP, B*d*, B*p*, perpendiculaires sur les directions XA, OA, xA, ωA, l'on aura (*Lem.* 15.) BP.BD > B*p*.B*d*. Mais l'équilibre supposé entre les poids E, F, sur l'appui B dans la situation MN du Levier auquel ils sont appliquez, donne (*Corol.* 2.) BP. BD :: E, F (*Hyp.*) :: *e*. *f*. Donc aussi *e*. *f* > B*p*. B*d*. Par consequent le poids E en *e* lorsque le Levier est en *mn*, l'emportera (*Corol.* 5.) sur le poids F alors en *f*, & toûjours de même jusqu'à ce que OX ou ωx soit en BA, dans laquelle situation ces deux poids seront enfin arrêtez (*Ax.* 3. & *Corol.* 1. *du princ. gener.*) par l'appui B alors directement opposé à chacun d'eux.

COROLLAIRE XLIV.

Puisque, lorsque le Levier MN, sur l'appui B duquel les poids E, F, faisoient (*Hyp.*) équilibre en cette situation MN,

été passé en mn, & ces poids en e, f, avec des directions toûjours concourantes en A, & des pesanteurs toûjours les mêmes qu'auparavant; il en résulte (*Corol.* 43.) $e.f > Bp.Bd$. C'est-à-dire (en prenant AB pour sinus total) e à f en plus grande raison que le sinus de l'angle BAω au sinus de l'angle BAx; & ces raisons devant être égales (*Corol.* 2.) pour l'équilibre entre ces deux poids e, f, sur le point B du Levier en mn. Il est visible que pour cet équilibre en mn, l'appui de ce Levier devroit être placé en B, x, sur un point b, qui rendît le sinus de l'angle bAω, au sinus de l'angle bAx comme e à f.

De sorte que si ces deux poids e, f, ou (*Hyp.*) E, F, étoient égaux entr'eux, les angles bAω, bAx, devroient aussi l'être entr'eux pour que ces poids de directions concourantes A, pussent faire équilibre entr'eux en mn sur l'appui b; ce qui rendroit alors $bx.b\omega :: Ax. A\omega$. Donc pour mettre ainsi en équilibre sur un Levier de situation quelconque mn, deux poids égaux e, f, de directions concourantes en A; l'appui de ce Levier devroit être placé dans un point b qui divisât la droite $x\omega$ en deux parties bx, $b\omega$, qui fussent entr'elles comme les distances xA, ωA du centre A des directions de ces deux poids aux points x, ω, de leurs applications à ce Levier.

D'où l'on voit que lorsque ce Levier, s'il est droit, ou la droite $x\omega$ seroit en RS sur la droite AB, ainsi qu'il y doit arriver (*Corol.* 43.) lorsque de sa situation MN où les poids E, F, faisoient (*Hyp.*) équilibre entr'eux sur son appui B, on l'aura fait passer en mn; l'appui b qui les y soûtiendroit en équilibre, seroit alors sur AB en un point β, qui avec le point R diviseroit la droite AS en trois parties AR, Rβ, βS, telles qu'on auroit alors la toute AS. AR :: βS. βR.

Pour trouver ce point β sur AB, il n'y a qu'à mener par S, R, deux paralleles quelconques SG, RH, rencontrées en G, H, par une droite quelconque AG, menée du point A; & après avoir pris RK=RH sur HR prolongée vers K, soit menée la droite GK qui rencontre AS

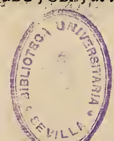
en β ; ce point β sera le requis ici : puisque cette construction rendant les triangles tant SAG, RAH, que βSG, RβK, semblables entr'eux deux à deux, l'on aura AS. AR : : SG. RH (*Hyp.*) : : SG. RK : : βS. βR. c'est-à-dire, AS. AR : : βS. βR. ainsi qu'il étoit requis.

COROLLAIRE XLV.

Il suit de ces deux derniers Corol. 43. 44. que si toutes les parties d'un poids quelconque non spherique, étoient de pesanteurs toûjours les mêmes pour chacune à toutes distances du centre de la Terre, auquel elles tendissent toutes constamment ; il n'y auroit aucun point dans ce corps par lequel appuyé ou suspendu ailleurs qu'au centre de la Terre, ce corps demeurât en repos dans plus d'une situation ; puisque dans quelque situation qu'il y fût en repos sur celui de ses points qu'on voudra, dès qu'on le feroit tourner sur ce point, sa partie abaissée vers le centre de la Terre l'emporteroit toûjours (*Corol.* 43.) sur l'autre qu'on en auroit ainsi éloignée. D'où l'on voit que dans la presente hypothese ce corps n'auroit aucun *centre de gravité* pris à l'ordinaire dans le sens de la Déf. 14. supposé, dis-je, que toutes les parties fussent chacune d'une pesanteur par tout la même, & qu'elles tendissent toûjours toutes au centre de la Terre.

On excepte ici la Sphere, parce que quoiqu'à distances differentes du centre de la Terre, elle & ses parties eussent (Corol. 37.) *des pesanteurs successivement differentes dans la presente hypothese des directions des poids concourantes à ce centre; les dispositions semblables de toutes ses parties autour du sien, la rendroient toûjours entiere de même position ou situation par rapport à celui-là, quelque mouvement qu'on lui donnât autour du sien appuyé ou suspendu, ses parties suppléant alors les unes aux autres à mesure qu'elles auroient les mêmes positions & les mêmes pesanteurs que celles ausquelles elles succederoient.*

FIG. 173. *Il est vrai qu'en regardant les secteurs* xBx, xBX, XBω, ωBO, OBx, *de la Sphere* xXOωx, *comme autant de divers*



[..]s semblables entr'eux, qui dans l'hypothese du Corol. 42. aur[o]ient tous leurs centres b *de gravité à distances égales du centre B de grandeur de cette Sphere; tous ces centres particuliers* b *de gravité seroient à la circonference d'une moindre Sphere* bbbb *concentrique à celle-là. Mais outre que nous ne sommes pas ici dans l'hypothese de ce Corol. 42. la raison précedente fait voir que le centre B de grandeur de la Sphere* xXωOx, *chargé de tous les centres particuliers* b *de gravité, en seroit encore lui-même un centre commun de gravité sur lequel appuyé ou soûtenu ils demeureroient tous en équilibre; & consequemment aussi que cette Sphere seroit encore en repos dans tout ce qu'elle pourroit avoir de situations differentes autour de son centre fixe B. Ainsi dans la presente hypothese des directions des poids concourantes au centre de la Terre, ou en tel autre point qu'on voudra de l'Univers, ce centre B de grandeur de la Sphere* xXωOx, *en doit aussi être le centre de gravité pris au sens ordinaire de la Déf. 14. comme il l'est* (Corol. 42.) *dans l'hypothese de ces directions paralleles entr'elles.*

Quant aux autres corps ou poids non spheriques, il est à remarquer que le précedent Cor. 45. ne leur refuse un tel centre de gravité dans la presente hypothese des directions des poids concourantes au centre de la Terre, ou en tel autre point qu'on voudra, qu'en cas que leurs changemens de position par rapport à ce point, n'en apportassent point à la pesanteur ou aux efforts de tendance de leurs parties vers ce point. Mais le contraire paroît dans le Corol. 37. lequel fait voir que dans le mouvement de chacun de ces corps autour du point fixe sur lequel il seroit en équilibre ou en repos, celles de ses parties qu'on approcheroit ainsi du centre de la Terre, où elles sont supposées tendre toutes, en deviendroient d'autant plus legeres (quoiqu'en raison differente) qu'on les en approcheroit davantage, & les autres au contraire d'autant plus pesantes, qu'on les en éloigneroit alors davantage. De sorte que les premieres, qui suivant le Corol. 43. l'emporteroient ici sur les autres, si elles y conservoient toutes leurs premieres pesanteurs, pourroient peut-être par cette diminution de la leur, & par l'augmentation de

celle des autres, ne point l'emporter ici sur elles, & y conserver toûjours leur premier équilibre avec elles dans tout ce qu'on pourroit donner de situations nouvelles autour du point d'appui de ce premier équilibre, au corps non spherique fait (Hyp.) *de toutes ces parties : auquel cas ce point seroit ici le centre de gravité de ce corps au sens ordinaire de la Déf.* 14. *comme lui ou un autre le seroit* (Corol. 42.) *dans l'hypothese des directions des poids paralleles entr'elles.*

Mais il y auroit là une compensation, de la justesse de laquelle il seroit d'autant plus difficile de s'assûrer, qu'il faudroit pour cela déterminer tous les angles au centre de la Terre, compris entre les directions de tous les points de chaque corps ou poids qui y tendroient. Cela joint à ce que l'éloignement des corps d'ici au centre de la Terre, est si grand, que sans erreur sensible toutes les directions de leurs parties y peuvent être prises pour paralleles entr'elles; & consequemment (Corol. 42.) *tous ces corps ou poids, de quelques figures qu'ils soient, pour avoir chacun un centre de gravité au sens ordinaire de la Déf.* 14. *Nous les prendrons donc ainsi dans la suite, en y prenant toûjours leurs directions & celles de leurs parties comme paralleles entr'elles, à moins que nous n'avertissions du contraire.*

COROLLAIRE XLVI.

Suivant le Corol. 42. le centre de gravité d'un corps ou poids quelconque étant (*Déf.* 14.) un point de ce corps, par lequel ce même corps étant appuyé ou suspendu, il demeureroit en équilibre ou en repos dans toutes les situations possibles autour de ce point fixe ; ce point y doit être chargé (*Corol.* 36. *nomb.* 2.) de la somme des pesanteurs particulieres de toutes les parties de ce corps, supposées de directions toutes paralleles entrelles, comme si ces pesanteurs étoient toutes réunies en ce seul point, ou comme si ce centre de gravité avoit seul la pesanteur entiere de tout ce poids. Donc par quelque point que ce soit que ce corps ou poids soit suspendu, par exemple, à un bras de Levier, ou qu'il soit appuyé

sur lui, il agira toûjours sur ce bras de Levier, comme, s'il n'y étoit suspendu ou appuyé que par son centre de gravité au point où ce bras se trouve rencontré par la direction de ce même centre de gravité, parallele (*Corol.* 36. *nomb.* 2.) aux directions (*Hyp.*) paralleles des parties de ce même poids.

COROLLAIRE XLVII.

Cela étant, si deux poids E, F, de directions paralleles entr'elles, & fixement appliquées (comme on les voit dans les Fig. 174. 175. 176.) à un Levier quelconque XO, dont l'appui B soit entr'eux dans la droite RS, qui passe par leurs centres de gravité R, S, sont en équilibre entr'eux sur cet appui B par le moyen de la branche BG de Levier XO d'une piece avec elle; le Corol. 40. fait voir qu'ils resteront toûjours en équilibre entr'eux dans toutes les situations possibles de ce Levier XO autour de ce même appui B, lequel par consequent (*Déf.* 14.) en sera ici le centre commun de gravité, chargé (*Corol.* 36. *nomb.* 2.) de la somme de ces deux poids E, F, suivant une direction parallele aux leurs. Fig. 174. 175. 176.

Il est visible (*Corol.* 46.) que les poids E, F, fixement attachez au Levier droit XO, qui passe par leurs centres de gravité R, S, dans la Fig. 174. n'y ont que l'effet qu'ils auroient, s'ils y étoient suspendus aux extrêmitez R, S, de ce Levier prolongé jusques-là; & qu'ainsi faisant (*Hyp.*) équilibre entr'eux sur l'appui B de ce Levier dans la situation RS, ils le feroient encore alors sur ce même appui B dans toutes les autres situations possibles de ce Levier.

COROLLAIRE XLVIII.

Mais si cet appui B, autour duquel le Levier XO peut tourner par le moyen de la branche BG de ce Levier, accrochée à cet appui, est au-dessus de la droite RS, qui passe par les centres de gravité, R, S, des deux poids E, F, encore de directions paralleles entr'elles, & fixement appliquées au Levier XO dans les Fig. 177. 178. 179. 180.

Fig. 177. 179. 180. comme dans celles du précedent Corol. 47. ou qui passe dans la Fig. 178. par les points R, S, de libre suspension de ces deux poids à ce Levier ; & si ces deux poids E, F, sont en équilibre entr'eux sur cet appui B dans une situation quelconque XO de ce Levier : quelqu'autre situation *xω* qu'on lui donne autour de ce point fixe B, le poids F qu'on aura ainsi élevé en *f*, l'emportera toûjours sur l'abaissé E en *e*, jusqu'à ce qu'il ait ramené le Levier dans la premiere situation XO, excepté lorsqu'on l'aura mis dans celle où *rſ* seroit parallele au-dessus de l'appui B à la premiere situation RS.

Pour le voir soit par cet appui B la droite DP perpendiculaire en D, P, aux directions (*Hyp.*) paralleles entr'elles DR, PS, des poids E, F, & rencontrées en *d*, *p*, par les directions *rd*, *ſp*, de ces deux poids en *e*, *f*, paralleles aussi (*Hyp.*) entr'elles & à celles-là, & qui rencontrent RS, en H, K, rencontrée aussi en M par *rſ*. Enfin de l'appui B soit menée sur RS en N la droite BN parallele à ces directions, laquelle se trouve en B*n*, lorsque RS est en *rſ*.

Cela fait, les triangles semblables MK*ſ*, MH*r*, donneront MK. MH : : M*ſ*. M*r*. Or M*ſ*. M*r* > *nſ*. *nr*. Et (*conſtr.*) *nſ*. *nr* : : NS. NR : : BP. BD. Donc MK. MH > BP. BD. Or (*conſtr.*) NK. NH > MK. MH. Et B*p*. B*d* : : NK. NH. Donc à plus forte raison B*p*. B*d* > BP. BD. Mais l'équilibre supposé dans la situation XO du Levier, donne (*Corol.* 2.) BP. BD : : E. F (*Hyp.*) : : *e*. *f*. Donc B*p*. B*d* > *e*. *f*. Ou *f*. *e*. > B*d*. B*p*. Donc aussi (*Corol.* 5.) le poids F en *f*, l'emportera ici sur le poids E en *e* dans la situation *xω* du Levier auquel ils sont appliquez ; & toûjours de même jusqu'à ce que ce Levier soit revenu dans la premiere situation XO de leur équilibre supposé, excepté lorsqu'on l'aura mis dans celle où RS seroit au dessus de l'appui B parallele à la situation d'équilibre qu'on lui suppose ici au-dessous de ce même point B. La raison de cette exception est visible en imaginant les figures de ce Corollaire-ci dans cette autre situation ; puisque BD, BP, y restant les mêmes qu'ici, l'on y auroit encore E. F : : BP. BD. ainsi que le don-

ne (*Cor.* 2.) l'équilibre ſuppoſé entre ces deux poids E, F, dans la premiere ſituation XO du Levier au-deſſous de l'appui B. Par conſequent (*Corol.* 3.) ces deux poids ſeroient encore alors en équilibre entr'eux au-deſſus de cet appui B.

COROLLAIRE XLIX.

Si l'on renverſe directement de bas en haut autour du point fixe B les Fig. 177. 178. 179. 180. du précedent Corol. 48. en ſorte que cet appui B ſe trouve ici au-deſſous de la droite RS, comme il étoit au-deſſus dans le Corol. 48. on verra ici par le raiſonnement qu'on a fait là, que les poids E, F, ne pourront faire équilibre entr'eux que dans une ſeule ſituation du Levier XO ainſi placé au-deſſus de cet appui B; & qu'en toute autre ſituation qu'on lui donne autour de cet appui, le poids abaiſſé l'emportera toûjours ſur l'autre, juſqu'à ce que RS ſoit arrivée au-deſſous de ce même appui B dans une ſituation parallele à la premiere ſuppoſée d'équilibre autour de ce point. On laiſſe au Lecteur le ſoin de renverſer ainſi ces figures pour ne les pas multiplier inutilement. Mais s'il veut s'en épargner la peine, il n'a qu'à imaginer les poids E, F, avec des tendances ſuivant RD, SP, directement contraires à celles qu'ils avoient ſuivant DR, PS, dans le précedent Corol. 48. & ainſi de ces mêmes poids en r, f, le raiſonnement de ce Corol. 48. leur fera, dis-je, voir ici comme là, que ſi ces deux poids E, F, ſont en équilibre dans la poſition XO du Levier auquel on les ſuppoſe appliquées, en quelqu'autre ſituation $x\omega$ qu'on mette ce Levier, l'on aura ici comme là $f.e > Bd.\ Bp.$ & conſequemment (*Corol.* 5.) que le poids F alors en f, l'emportera ici ſur le poids E alors en e; & toûjours de même juſqu'à ce que le Levier ſoit tombé au-deſſous de B dans une ſituation qui y rende rf parallele à la premiere poſition RS d'équilibre d'abord ſuppoſé, dans laquelle conſequemment il reſtera au-deſſous de B comme dans le Corol. 48. Fig. 177. 178. 179. 180.

COROLLAIRE L.

Les deux derniers Corol. 48. 49. se peuvent encore conclure autrement de ce qui les précede. Pour cela soit N le point de la ligne RS, sur lequel appuyé ou soûtenu les poids E, F, demeureroient en équilibre entr'eux dans une situation telle qu'on voudra de cette ligne droite regardée comme un Levier auquel ces deux poids seroient appliquez en R, S, par leurs centres de gravité R, S, dans les Figures 177. 179. 180. ou par leurs points R, S, de libre suspension dans la Figure 178. les directions de ces deux poids étant supposées paralleles entr'elles, ce point N en sera aussi un (*Corol.* 48.) sur lequel appuyé ou soûtenu ces mêmes poids feroient encore équilibre entr'eux dans toute autre situation de cette ligne RS, & consequemment aussi du Levier XO auquel ces deux poids sont supposez attachez ou suspendus, c'est-à-dire, dans toutes les situations possibles de l'une & de l'autre. Donc dans toutes ces differentes situations la direction résultante du concours de ces deux poids E, F, passera toûjours (*part.* 2.) par ce point N, & toûjours (*Corol.* 36. *nomb.* 2.) parallelement à leurs directions, c'est-à-dire, verticalement. Donc n'y ayant ici (*Hyp.*) d'appui qu'en B, ces deux poids ne peuvent (*princ. gener. Corol.* 2.) demeurer en équilibre entr'eux sur ce point B, que lorsqu'il se trouvera dans la verticale qui passera par N, ou (ce qui revient au même) seulement lorsque ce point N se trouvera dans la verticale qui passera par B, telle qu'est (*constr.*) BN dans ces figures-ci. Or il est visible que de toutes les situations possibles de la droite RS, ou du Levier XO autour de l'appui B, il n'y en a que deux où le point N de la droite RS puisse se rencontrer dans la verticale menée par ce point fixe B, sçavoir, une au-dessous de lui, & l'autre directement au-dessus parallele à celle-là. Donc soit que cet appui B se trouve au-dessus de RS comme dans le Corol. 48. ou qu'il se trouve au-dessous, comme dans le Corol. 49. il n'y a que ces deux situations où le Levier XO puisse demeurer en repos, &

les poids E, F, en équilibre entr'eux sur cet appui B, sçavoir, lorsque le point N de la ligne RS se trouvera dans la verticale qui passera par cet appui B, soit au-dessous ou au-dessus de cet appui; & que dans quelqu'autre situation qu'on mette ce Levier, il retombera toûjours au-dessous de l'appui B jusqu'à ce que le point N de la droite RS soit dans la verticale qui passera par ce point B, telle qu'on suppose ici BN. Ce qui comprend à la fois les Corol. 48. 49.

COROLLAIRE LI.

Suivant cela, le point N étant ici (*Corol.* 47.) le centre commun de gravité des poids E, F, de directions (*Hyp.*) paralleles entr'elles; le Levier XO, ni ces deux poids ne s'arrêteront en équilibre sur l'appui B, que lorsque leur centre commun de gravité sera le plus bas ou le plus haut qu'il puisse être au-dessous ou au-dessus de B dans la verticale qui passera par ce point: ainsi lorsque ce centre commun N de gravité ne sera point au plus haut qu'il puisse être, il retombera toûjours au plus bas dans cette verticale, où il demeurera, & y retiendra le Levier avec les poids E, F, en équilibre entr'eux.

COROLLAIRE LII.

Puisque (*Corol.* 47. 48. 49. 50.) deux poids appliquez fixement à un Levier, ne peuvent rester en équilibre dans toutes les situations possibles de ce Levier, que sur un point qui soit entr'eux dans la droite qui passe par leurs centres particuliers de gravité, & qu'il y a toûjours (*Cor.* 2. 47.) un tel point dans cette ligne; leur centre commun de gravité (*Déf.* 14.) doit toûjours être dans cette même ligne, & jamais ailleurs, c'est-à-dire, toûjours entr'eux en ligne droite avec leurs centres particuliers de gravité, & diviser toûjours (*Corol.* 2. 3.) la distance d'un de ces centres particuliers à l'autre, ou cette ligne en raison reciproque de ces poids: de sorte qu'un tel point de division de la distance de leurs centres par-

ticuliers de gravité, sera toûjours (*Corol.* 47. *& Déf.* 14.) le centre commun de gravité de ces deux poids.

SCHOLIE.

Les proprietez du Tour, du Treüil, du Vindas & des autres Machines qui y ont rapport, déja démontrées dans la Section 4. sans le secours d'aucune autre Machine, se démontrent aussi d'ordinaire par le moyen des Leviers ausquels on les réduit : par exemple, dans les Figures
Fig. 135. & suivantes jusqu'à 146. comprises depuis la 135e. jusqu'à la 146e. inclusivement de part & d'autre, on considere MAN comme un Levier dont l'appui est en A, & aux bras AM, AN, duquel le poids P & la puissance R sont perpendiculairement appliquez, c'est-à-dire, suivant des directions perpendiculaires à ces bras ; & l'on trouve par ce moyen (*Th.* 21. *Corol.* 2.) P. R : : AN. AM. lorsque ce poids P & cette puissance R sont en équilibre sur l'appui A de cette espece de Machine, ainsi que nous l'avons déja trouvé sans le secours d'aucune autre dans la Section 4. Th. 19. Corol. 1. & nomb. 2. du Corol. 3. En réduisant ainsi en Leviers le Tour, le Treüil, & les autres Machines qui y ont rapport, le present Th. 21. avec ses Corollaires pourroit servir de même à démontrer tout le contenu de cette Sect. 4. Mais aussi reciproquement cette Section pourroit-elle servir à démontrer ce Théoreme avec ses Corollaires, en regardant au contraire les Leviers comme faits de bras de Tour, de Vindas, &c. l'indépendance de toutes ces Machines entr'elles, est ce qui m'a porté à les démontrer idépendamment les unes des autres, le précedent principe general convenant également & immédiatement à toutes sortes de Machines, sans être obligé de se forcer l'imagination à les transformer ainsi d'une espece en une autre.

THEOREME XXII.

Fig. 153. & suivantes jusqu'à 167. *En cas d'équilibre dans les Figures précedentes Th.* 21. *entre les puissances E, F, sur l'appui B du Levier quelconque*

MN, auquel elles sont appliquées suivant des directions aussi quelconques ; si d'un des angles R ou S du parallelogramme ARGS, par exemple, de l'angle R on mene RK perpendiculaire en K sur la diagonale AG prolongée.

I. *Les efforts de ces deux puissances E, F, sur l'appui B suivant sa direction AB ou BA, seront toûjours entr'eux en raison de AK à KG.*

II. *Chacun de ces efforts sera aussi toûjours à la charge de cet appui résultante de leur somme ou de leur difference, comme chacune de leurs expressions AK, KG, sera à la diagonale AG du parallelogramme ARGS.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Après avoir aussi mené SL perpendiculaire en L sur la diagonale AG prolongée, soient appellez K, L, les efforts que les puissances E, F, font (selon Lem. 3. part. 2.) sur l'appui B suivant cette diagonale AG, laquelle en ce cas d'équilibre passe (*Th. 21. part. 4.*) par ce point d'appui B. Ce même Lem. 3. part. 2. fait voir que K. E : : AK. AR. Et F. L : : AS. AL. De plus la part. 3. & le Corol. 1. du Th. 21. fait voir aussi que E. F : : AR. AS. De sorte qu'en ce present cas d'équilibre,

L'on aura toûjours $\left\{\begin{array}{l} K. E :: AK. AR. \\ E. F :: AR. AS. \\ F. L :: AS. AL. \end{array}\right.$

Donc (en multipliant par ordre) K. L : : AK. AL. Mais les triangles (*constr.*) semblables GRK, ALS, ayant GR = AS à cause du parallelogramme ARGS, ont pareillement AL = KG. Donc aussi K. L : : AK. KG. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

PART. II. Puisque (*part. 1.*) K. L : : AK. KG. ou L. K : : KG. AK. l'on aura pareillement ici L ± K. K : : KG ± AK. AK. sçavoir, L + K. K : : KG + AK. AK : : AG. AK. dans les Fig. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 167. Et L − K. K : : KG − AK. AK : : AG. AK. dans

les Fig. 162. 163. 164. 165. 166. Donc la charge de l'appui B résultante de la somme ou de la difference des efforts K, L, que les puissances E, F, font sur lui en même sens dans les premieres de ces Figures, étant =L+K; & étant =L−K dans les autres Figures où ces efforts K, L, sont directement contraires : la charge de l'appui B résultante du concours des puissances E, F, en équilibre (*Hyp.*) sur lui, c'est-à-dire, résultante de la somme ou de la difference des efforts K, L, que ces deux puissances font sur lui suivant une même ligne droite AB, sera toûjours ici à un tel effort K de la puissance E : : AG. AK. Or (*part.* 1.) K. L : : AK. AL. Donc (en raison ordonnée) cette charge de l'appui B sera aussi toûjours à l'effort L de la puissance F : : AG. AL. Par consequent en appellant B cette charge de l'appui B, l'on aura par tout ici B. K : : AG. AK. & B. L : : AG. AL. ou K. B : : AK. AG. & L. B : : AL. AG. c'est-à-dire, que chacun des efforts K, L, des puissances E, F, sur l'appui B de leur équilibre entr'elles, sera par tout ici à la charge de cet appui, résultante de la somme ou de la difference de ces efforts, comme chacune des expressions (*part.* 1. AK, AL ou KG, sera à la diagonale AG du parallelogramme ARGS. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

COROLLAIRE I.

La part. 1. donnant K. L : : AK. KG. & les triangles (*constr.*) rectangles semblables AKR, GLS; & ALS, GKR, ayant (de même que le parallelogramme ARGS) AR=GS, AS=GK, auront aussi KR=LS, AL=GK; & consequemment, si l'on prolonge KR jusqu'à la rencontre de AF en V, l'on aura ici KV. KR : : KV. LS : : AK. AL : : AK. KG : : K. L. Mais en prenant AK pour le rayon, la Déf. 10. fait voir que KV, KR, sont les tangentes des angles VAK, RAK, ou de leurs égaux ou complemens FAB, EAB. Donc les efforts K, L, des puissances E, F, sur l'appui B suivant sa direction AB ou BA, en cas d'équilibre entr'elles sur cet appui, seront aussi toûjours

jours entr'eux comme ces tangentes KV, KR des angles FAB, EAB, compris entre chacune des directions AE, AF, de ces puissances, & la direction AB de la charge (*Th.* 21. *Corol.* 35.) de l'appui B de leur équilibre entr'elles.

COROLLAIRE II.

La part. 2. fait aussi voir que chacune de ces puissances E, F, en équilibre (*Hyp.*) sur l'appui B, contribue à la charge de cet appui, lorsqu'elles conspirent ensemble à le charger, comme dans les Fig. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 167. ou de combien l'une lui aide à soûtenir l'effort de l'autre sur lui, lorsqu'elles le pressent à contre-sens, comme dans les autres Fig. 162. 163. 164. 165. 166. cette partie 2. fait, dis-je, voir que la perpendiculaire RK sur la diagonale AG prolongée, donne toûjours AK à KG, comme ce que la puissance E a de part à la charge de cet appui B, est à ce que la puissance F y en a dans le premier cas; ou comme ce que la puissance E soûtient de l'effort de la puissance F sur cet appui, est à ce même effort de la puissance F.

Cette part. 2. fait voir de plus que la perpendiculaire SL sur la même diagonale AG prolongée, donne aussi GL à AL en cette même raison; puisque les triangles (*constr.*) semblables AKR; GLS; & ALS, GKR, ayant AR=GS, & AS=GR, à cause du parallelogramme ARGF, ont aussi GL=AK, & AL=KG.

COROLLAIRE III.

Suivant cela, & suivant la part. 3. & les Corol. 1. 35 du Th. 21. deux puissances quelconques, appliquées à un Levier aussi quelconque MN suivant telles directions qu'on voudra, étant supposées en équilibre entr'elles sur l'appui B de ce Levier; si l'on mene de cet appui au concours A de ces directions une droite AB, sur laquelle prolongée (s'il est necessaire) soit la diagonale AG d'un parallelogramme ARGS fait de côtez AR, AS, pris sur ces mêmes directions des puissances E, F; & qu'ensuite

de son angle R on mene RK perpendiculaire en K sur cette diagonale AG prolongée : l'on aura tout à la fois,

1°. Par la part. 3. & le Corol. 1. du Th. 21. les puissances E, F, entr'elles comme les côtez AR, AS, correspondans du parallelogramme ARGS ; & chacune à la charge de l'appui B, résultante de leur concours, comme chacun de ses côtez AR, AS, est à la diagonale AG de ce parallelogramme.

2°. Par le Corol. 35. du Th. 21. l'on aura AB ou BA, en un mot AG pour la direction de cette charge de l'appui B.

3°. Par le précedent Corol. 2. les parties AK, KG ou GL, LA, de la diagonale AG prolongée entr'elles comme ce que les puissances E, F ; contribuent à cette charge de l'appui B, lorsqu'elles conspirent ensemble à le charger ; ou comme ce que la puissance E soûtient de l'effort de la puissance F, est à ce même effort de cette puissance F.

COROLLAIRE IV.

Ayant ici (*part.* 2.) K. B : : AK. AG. Et L. B : : AL. AG. Outre (*Lem.* 3. *Corol.* 1. *nomb.* 3.) E. K : : AR. AK. Et F. L : : AS. AL. la premiere & la troisiéme de ces quatre analogies donneront (en raison ordonnée) E. B : : AR. AG. la seconde & la quatriéme donneront de même F. B : : AS. AG. Donc en cas d'équilibre entre les puissances E, F, sur l'appui B, chacune d'elles sera toûjours à la charge de cet appui, résultante de leur concours d'action sur lui, comme chacun des côtez AR, AS, sont à la diagonale AG du parallelogramme ARGS qui a ses côtez sur les directions de ces puissances, & sa diagonale sur une ligne droite menée du concours A de ces directions sur l'appui B, conformément à la part. 3. du Th. 21.

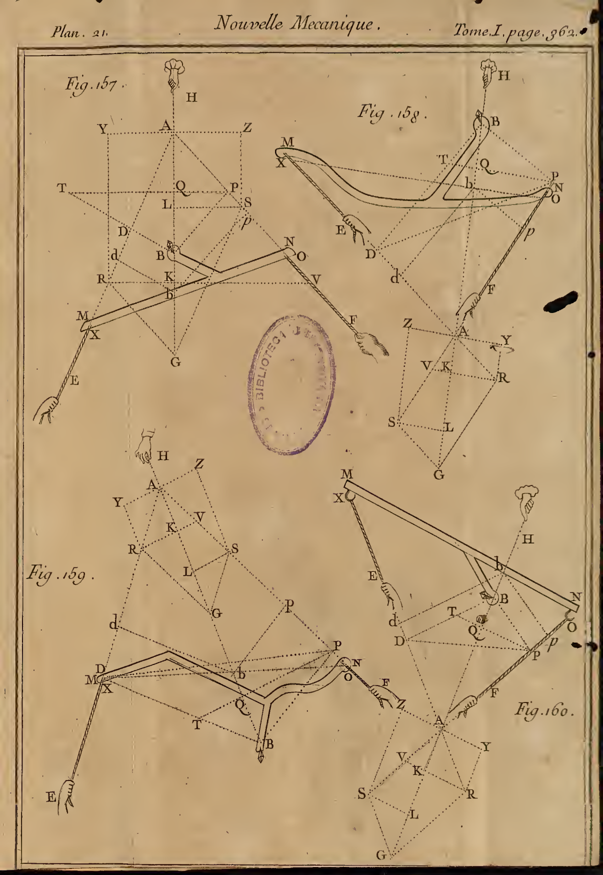
Tous les Corollaires tirez de cette partie 3. du Th. 21. pourroient être pareillement déduits de ce Corol. 4. les Corollaires du Th. 2. font aussi voir qu'on en pourroit encore tirer de pareils de celui-ci. Tout cela est presentement trop aisé pour s'y arrêter davantage.

Fig. 153.

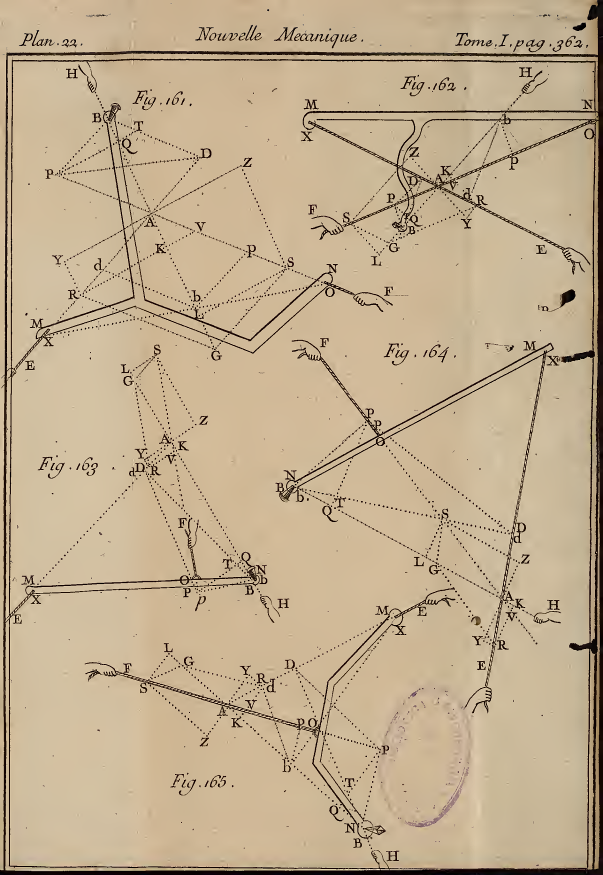
Fig. 154.

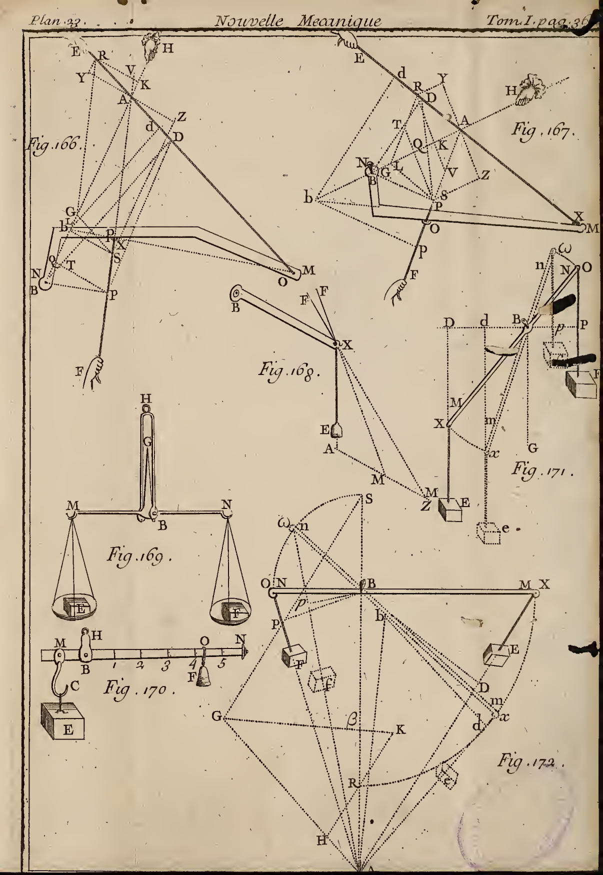
Fig. 155.

Fig. 156.



BIBLIOTECA


Fig. 161.
Fig. 162.
Fig. 163
Fig. 164.
Fig. 165.


Fig. 166.
Fig. 167.
Fig. 168.
Fig. 169.
Fig. 170.
Fig. 171.
Fig. 172.

SCHOLIE.

Si l'on imagine les parallelogrammes rectangles AKRY, ALSZ, dont les diagonales AR, AS, soient sur les directions AE, AF, des puissances E, F, depuis leur concours A : les forces absolues de ces puissances suivant ces directions, étant composées (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) chacune de deux autres suivant AK, AY, pour la premiere E, & suivant AL, AZ, pour la seconde F; on verra comme dans la part. 3. du Lem. 3. que de ces quatre forces composantes, les deux suivant AY, AZ, toûjours égales & directement opposées entr'elles, se détruisent ou se soûtiennent toûjours mutuellement, & que les deux autres composantes suivant AK, AL, se trouvent aussi détruites ou soûtenues par la résistance invincible de l'appui B placé dans leur direction commune AG, lorsqu'elles agissent en même sens suivant cette direction; ou par la résistance de cet appui aidé de la plus foible, lorsqu'elles agissent en sens contraires suivant cette même direction AG : desorte que pour lors les composées E, F, le sont aussi toûjours, & consequemment hors d'état de faire pancher le Levier MN d'aucun côté, ainsi qu'on l'a déja vû dans la part. 5. du Th. 21.

THEOREME XXIII.

Soient deux puissances quelconques E, F, appliquées en X, O, au Levier droit MN de situation quelconque, suivant des directions XE, OF, qui prolongées concourent en tel point A qu'on voudra. FIG. 181. & suivantes jusqu'à 186.

I. *Si ces deux puissances E, F, ainsi appliquées au Levier MN, sont en équilibre entr'elles sur quelque point B de ce Levier, l'on aura toûjours alors E. F :: AX×BO. AO×BX.*

II. *Reciproquement si ces deux puissances E, F, appliquées (comme ci-dessus) au Levier MN, sont entr'elles en cette raison; elles feront équilibre entr'elles sur le point B de ce Levier.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Soit menée BA prolongée vers G; & autour de sa partie quelconque AG, comme diagonale, soit le parallelogramme ARGS fait de côtez AR, AS, pris sur les directions prolongées AX, AO; des puissances E, F. Cela fait, si l'on y ajoûte par R la droite RV parallele à ce Levier MN, & qui prolongée rencontre BG, OS, en K, V; les triangles XAO, RAV; BAO, KAV; BAX, KAR, AKV, GKR, qu'on voit ici (*constr.*) semblables entre-eux deux à deux, donneront AX, AO : : AR. AV. Et BO. BX : : KV. KR : : AV. GR : : AV. AS. c'est-à-dire,

{ AX. AO : : AR. AV.
{ BO. BX : : AV. AS.

Donc (en multipliant par ordre) AX×BO. AO×BX : : AR×AV. AS×AV : : AR. AS. Or en cas d'équilibre entre les puissances E, F, sur l'appui B du Levier MN, l'on aura (*Th.* 21. *Corol.* 1.) toûjours E. F : : AR. AS. Donc en ce cas d'équilibre l'on aura aussi toûjours ici E. F : : AX×BO. AO×BX. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

Autrement. En prenant *ſ* pour la marque ou la caracteristique des sinus, la Trigonométrie donnera *ſ*BAO. *ſ*ABO : : BO. AO. Et *ſ*ABX. *ſ*BAX : : AX. BX. Donc les angles ABX, ABO, égaux entreux, ou complemens l'un de l'autre à deux droits, rendant (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) leurs sinus *ſ*ABX, *ſ*ABO, égaux entr'eux; l'on aura ici (en multipliant par ordre les deux analogies précedentes) *ſ*BAO. *ſ*BAX : : AX×BO. AO×BX. Or l'équilibre ici supposé entre les puissances E, F, y donne (*Th.* 21. *Cor.* 11. *nomb.* 1.) E. F : : *ſ*BAO. *ſ*BAX. Donc en ce cas d'équilibre, l'on aura toûjours ici E. F : : AX×BO. AO×BX. *Ce qu'il falloit encore* 1°. *démontrer.*

PART. II. Reciproquement si l'on suppose ici E. F : : AX×BO. AO×BX, il y aura ici équilibre entre ces deux puissances E, F, sur l'appui B du Levier MN, auquel elles soient appliquées comme ci-dessus. Car la constru-

ction demeurant la même ici que là, l'on aura encore ici comme là (*démonstrat.* 1. *de la part.* 1.) AX×BO. AO×BX :: AR. AS. Donc on aura ici E. F :: AR. AS. Par consequent (*Th.* 21. *part.* 6.) ces deux puissances E, F, demeureront ici en équilibre entr'elles sur le point B du Levier MN, par lequel passe la diagonale AG prolongée du parallelogramme ARGS, fait de côtez AR, AS, pris sur les directions AX, AO prolongées de ces deux puissances E, F. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

Autrement. La construction donnera ici (comme dans la démonstration 2. de la part. 1.) ſBAO. ſBAX :: AX×BO. AO×BX. Donc suivant l'hypothese qu'on fait ici de E. F :: AX×BO. AO×BX, l'on y aura E. F :: ſBAO. ſBAX. Par consequent (*Th.* 21. *Corol.* 11. *nomb.* 2.) ces deux puissances E, F, seront ici en équilibre entr'elles sur l'appui B du Levier MN auquel on les suppose appliquées. *Ce qu'il falloit encore* 2°. *démontrer.*

COROLLAIRE I.

Le cas d'équilibre entre les poids E, F, sur le point B de leur Levier XO, donnant toûjours ici (*part.* 1.) E. F :: AX×BO. AO×BX. Et consequemment E×AO×BX=F×AX×BO. l'on y aura aussi toûjours alors BX. BO :: F×AX. E×AO. c'est-à-dire, que l'appui de cet équilibre divisera toûjours le Levier droit XO en deux bras BX, BO, qui seront entr'eux en raison composée de la reciproque des poids E, F, & de la directe de leurs distances AX, AO, au centre A de la Terre.

COROLLAIRE II.

Reciproquement dans la même hypothese de la pesanteur de chaque poids en raison de sa distance au centre de la Terre, auquel il tende toûjours, deux tels poids E, F, seront toûjours en équilibre sur le point B qui divisera leur Levier XO en cette raison de BX. BO :: F×AX. E×AO. Puisque cette raison ou proportion donnant E×AO×BX=F×AX×BO, l'on aura pour lors E. F :: AX×BO.

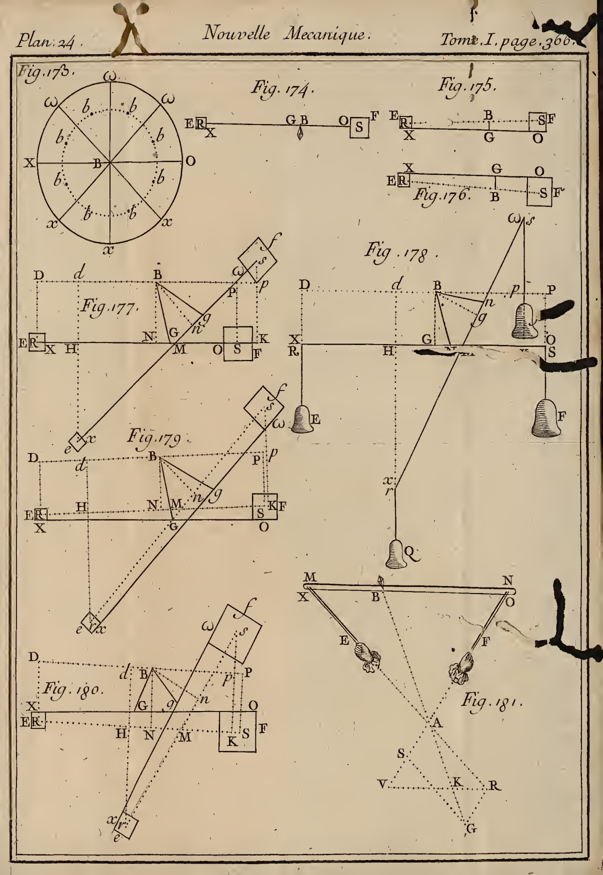
AO×BX. Ce qui (*part.* 2.) rend toûjours ici ces deux poids E, F, en équilibre entr'eux sur ce point B.

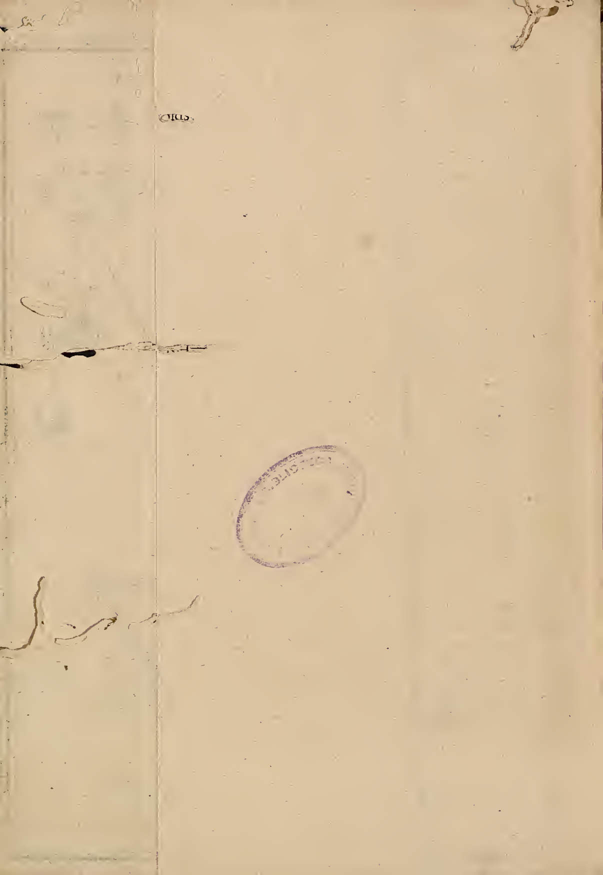
COROLLAIRE III.

FIG. 187. & suivantes jusqu'à 192. Tout ce qu'on voit des précedentes Fig. 181. 182. 183. 184. 185. 186. dans les presentes Fig. 187. 188. 189. 190. 191. 192. demeurant les mêmes ici que là, si l'on y ajoûte BH, BL qui fassent en B avec XO les angles XBH=XAB, OBL=OAB;

1°. La part. 1. fait voir qu'en cas d'équilibre entre les puissances E, F, sur l'appui B, on aura toûjours E. F :: BL. BH. Car les triangles semblables AXB, BXH; AOB, BOL, résultans de la presente supposition des angles XBH=XAB, OBL=OAB, donneront AX. AB :: BX. BH. Et AB. AO :: BL. BO. D'où résulte (en multipliant par ordre) AX. AO :: BX×BL. BO×BH. Ce qui donne AX×BO×BH=AO×BX×BL; & consequemment BL. BH :: AX×BO. AO×BX. Or en ce cas d'équilibre des puissances E, F, sur l'appui B du Levier MN, auquel elles sont (*Hyp.*) appliquées en X, O, suivant des directions concourantes en A; la part. 1. donne E. F :: AX×BO. AO×BX. Donc en ce même cas l'on aura aussi E. F :: BL. BH. ainsi qu'on le vient d'avancer.

2°. La part. 2. fait reciproquement voir que si E. F :: BL. BH. Ces deux puissances E, F, appliquées comme ci-dessus aux points X, O, du Levier MN, seront en équilibre entr'elles sur l'appui B de ce Levier : car la construction demeurant ici la même que dans le précedent nomb. 1. l'on aura encore ici comme là, BL. BH :: AX×BO. AO×BX. Donc la présente hypothese donnant ici E. F :: BL. BH. l'on y aura pareillement E. F :: AX×BO. AO×BX. Par consequent (*part.* 2.) ces deux puissances E, F, seront ici en équilibre entr'elles sur le point B du Levier MN, auquel on les suppose appliquées comme ci-dessus.


Fig. 173.
Fig. 174.
Fig. 175.
Fig. 176.
Fig. 177.
Fig. 178.
Fig. 179.
Fig. 180.
Fig. 181.



COROLLAIRE IV.

Pour voir presentement l'accord du précedent Corol. avec les Corol. 2. 3. du Th. 21. dans lesquels ayant mené BD, BP, perpendiculaires aux directions XE, OF, des puissances E, F, l'on a vû que le cas d'équilibre entre ces deux puissances sur un point quelconque B de leur Levier MN, donne toûjours E. F :: BP. BD. Et reciproquement que ce rapport rend toûjours ces deux puissances E, F, en équilibre entr'elles sur cet appui B. Cela joint au précedent Corol. 3. fait voir que l'on doit toûjours avoir ici BP. BD :: BL. BH. quoique les deux triangles PBL, DBH, ne soient point semblables entr'eux. Pour voir (dis-je) cet accord, voici comment il résulte du present Th. 23.

1°. Que E. F :: BP. BD. en cas d'équilibre entre les puissances E, F, sur le point B de leur Levier MN; car la Trigonométrie fait voir (en prenant encore ici *ſ* pour la marque des sinus) que AX. BX :: *ſ*ABX. *ſ*BAX. Et BO. AO :: *ſ* BAO. *ſ*ABO. Ce qui (en multipliant par ordre) donne AX×BO. AO×BX :: *ſ*ABX×*ſ*BAO. *ſ*ABO×*ſ*BAX (à cause de *ſ*ABX=*ſ*ABO) :: *ſ*BAO. *ſ*BAX (en prenant AB pour sinus total) :: BP. BD. Or la part. 1. fait voir qu'en cas d'équilibre entre les puissances E, F, sur l'appui B du Levier MN, auquel on les suppose appliquées, l'on aura toûjours E. F :: AX×BO. AO×BX. Donc en ce cas d'équilibre cette part. 1. donne aussi toûjours E. F :: BP. BD. de même que le Corol. 2. du Th. 21. ainsi qu'il le falloit 1°. faire voir.

2°. La part. 2. fait reciproquement voir que ce rapport rend toûjours ces deux puissances E, F, en équilibre entr'elles sur le point B de leur Levier MN. Car si E. F :: BP. BD :: *ſ*BAO. *ſ*BAX. l'égalité *ſ*ABX=*ſ*ABO rendra pour lors E. F :: *ſ*ABX×*ſ*BAO. *ſ*ABO×*ſ*BAX (en raisonnant comme dans le précedent nomb. 1.) :: AX×BO. AO×BX. Donc (*part.* 2.) les puissances E, F, supposées en raison de BP à BD, seront ici en équili-

bre entr'elles (comme dans le Corol. 3. du Th. 21.) sur l'appui B déterminé par ce rapport. Ce qu'il falloit aussi 2°. faire voir.

COROLLAIRE V.

Puisque (*part.* 1.) en cas d'équilibre sur l'appui B du Levier MN entre les puissances E, F, qui (*Hyp.*) y sont appliquées en X, O, avec des directions concourantes en A, l'on aura toûjours E. F : : AX×BO. AO×BX. & que reciproquement (*part.* 2.) il y aura toûjours équilibre sur le même appui B entre ces deux puissances E, F, tant qu'elles seront entr'elles en ce rapport : il suit,

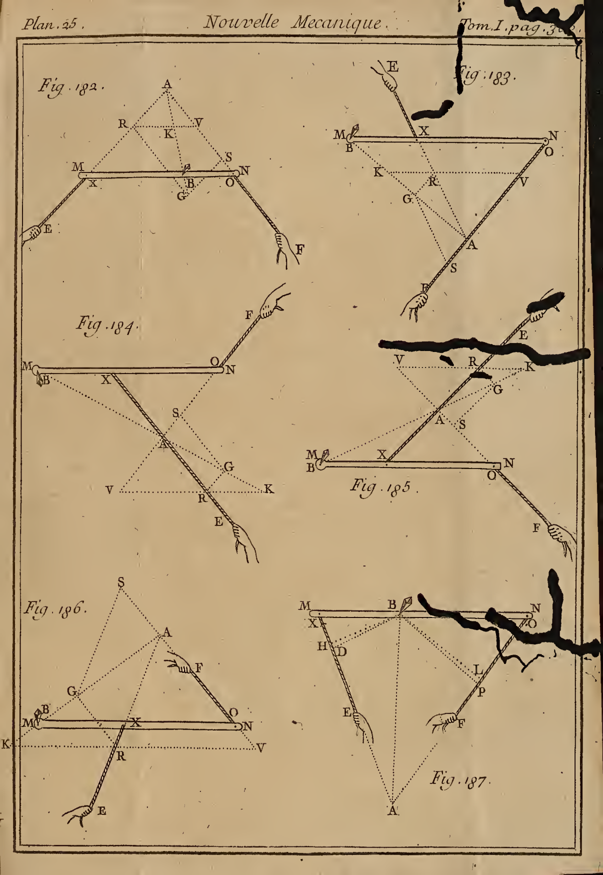
1°. Que si BX=BO, quelques soient AX, AO, l'équilibre entre les puissances E, F, sur l'appui B, donnera toûjours (*part.* 1.) E. F : : AX. AO. Et reciproquement que dans cette hypothese de BX=BO, ce rapport entre ces deux puissances E, F, les mettra toûjours (*part.* 2.) en équilibre entr'elles sur le même appui B.

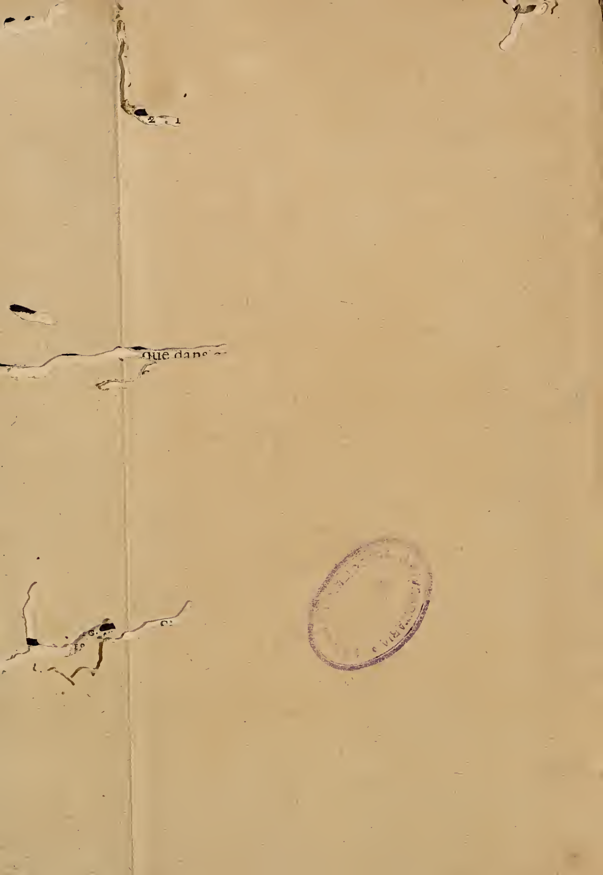
2°. Que si AX=AO, comme lorsque le point A est infiniment éloigné du Levier MN, & que ces directions AX, AO, sont consequemment (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) paralleles entr'elles ; l'équilibre sur l'appui B entre les puissances E, F, donnera toûjours alors (*part.* 1.) E. F : : BO, BX. Et reciproquement (*part.* 2.) que ce rapport les mettra toûjours en équilibre entr'elles sur le même appui B dans ce cas de leurs directions paralleles entr'elles. Tout ceci s'accorde encore pour ce cas avec les Corol. 2. 3. du Th. 21.

COROLLAIRE VI.

FIG. 123. 124. Si au lieu des puissances E, F, des Fig. précedentes, on suppose ici deux poids ou deux points pesans E, F, appliquez aux extrêmitez X, O, du Levier droit XO suivant des directions XA, OA, qui concourent en un point quelconque A, qui soit (si l'on veut) le centre de la Terre, auquel point nous allons presentement supposer que tous les poids tendent.

1°.


Fig. 182.
A R V K S M N X B O G E F
Fig. 183.
E X M N B O K R V G A S F
Fig. 184.
F M O N B X S A G V R K E
Fig. 185.
E V R K G A S M B X N O F
Fig. 186.
S A F G B M X O N K R V E
Fig. 187.
M B N X O H D L P E F A



1°. En cas d'équilibre entre ces deux poids quelconques E, F, sur tel point B que l'on voudra de leur Levier XO, la part. 1. fait voir que l'on aura toûjours E. F :: AX×BO. AO×BX.

2°. La part. 2. fait reciproquement voir que si ces deux poids E, F, sont entr'eux en ce rapport, ils seront en équilibre entr'eux sur le point B de leur Levier XO.

3°. Si après avoir mené BA, on fait les angles XBH=XAB, OBL=OAB, le nomb. 1. du Corol. 3. fait voir qu'en cas d'équilibre entre les poids F, F, sur le point B de leur Levier XO, l'on aura toûjours E. F :: BL. BH.

4°. Le nomb. 2. du même Corol. 3. fait reciproquement voir que si E. F :: BL. BH. ces deux poids E, F, seront en équilibre entr'eux sur le point B de leur Levier XO.

COROLLAIRE VII.

Les poids E, F, étant fixement appliquez aux extrêmitez du Levier droit XO, comme on les voit dans les Fig. 195. 196. 197. & de directions toûjours concourantes au centre A de la Terre, si l'on suppose que la pesanteur de chacun d'eux varie en raison de ses differentes distances à ce centre ; en sorte que quelque situation $x\omega$ qu'on donne au Levier XO, en faisant passer les poids E, F, en e, f, la pesanteur du poids E en X, soit en ce qu'il en aura en x, comme XA à xA ; & que celle du poids F en O, soit à ce qu'il en aura en ω, comme OA à ωA : il suit du précedent Corol. 6. que quelques soient d'ailleurs les pesanteurs d'un de ces poids à celles de l'autre, s'ils sont en équilibre entr'eux en X, O, sur le point B du Levier XO, ils seront encore en équilibre entr'eux en x, ω, sur le même point B passé en b dans toute autre situation $x\omega$ de ce Levier, laquelle donne par tout bx=BX, & $b\omega$=BO. FIG. 196. 197.

Car en prenant encore ici E, F, pour les pesanteurs totales de ces deux poids en X, O, & e, f, pour ce qu'ils en ont en x, ω, la presente hypothese de E. e :: AX. Ax. & de F. f :: AO. Aω. donnera $E=\frac{e\times AX}{Ax}$, & $F=\frac{f\times AO}{A\omega}$. Or

l'équilibre supposé en XO sur le point B, donne (*Corol.* 6. *nomb.* 1.) E. F :: AX.×BO. AO×BX (à cause de BO = $b\omega$, & de BX = bx) :: AX×$b\omega$. AO×bx. Donc aussi $\frac{e\times AX}{Ax}$. $\frac{f\times AO}{A\omega}$ :: AX×$b\omega$. AO×bx. c'est-à-dire (en divisant les deux antecedens par $\frac{AX}{Ax}$, & les deux consequens par $\frac{AO}{A\omega}$) $e.f$ :: Ax×$b\omega$. Aω×bx. Par consequent (*Corol.* 6. *nomb.* 2.) les mêmes corps E, F, des pesanteurs (*Hyp.*) variables en raison de leurs distances au centre A de la Terre, lesquels étoient (*Hyp.*) en équilibre en X, O, sur le point B du Levier XO, seront encore en équilibre entr'eux en x, ω, sur le même point B passé en b, de ce Levier passé en toute autre situation $x\omega$.

COROLLAIRE VIII.

Si presentement on imagine le centre A, auquel on suppose que les poids E, F, ou e, f, tendent toûjours, infiniment éloigné d'eux ; leurs directions se trouvant alors (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) toutes paralleles entr'elles, & les distances de ces poids à ce centre toutes égales entr'elles, consequemment la pesanteur de chacun d'eux toûjours la même dans l'hypothese qu'on fait ici (comme dans le précedent Corol. 7.) en raison des distances des poids au centre de la Terre ; il suit du précedent Corol. 7. que si deux poids quelconques de directions toûjours paralleles entr'elles ; & de pesanteurs toûjours les mêmes, font équilibre entr'eux sur un point quelconque d'un Levier auquel ils soient appliquez, ils se trouveront de même toûjours en équilibre entr'eux sur ce point de ce Levier dans toute autre situation de ce même Levier, ainsi qu'on l'a déja vû d'une autre maniere dans le Corol. 40. du Th. 21.

COROLLAIRE IX.

Donc (*Corol.* 7. 8.) un Levier droit chargé de deux poids quelconques à fes extrêmitez, ayant toûjours (*Th.* 21. *part.* 6.) un point fur lequel ces deux poids demeureront en équilibre entr'eux ; il aura auffi toûjours un point (qui fera celui-là) fur lequel cet équilibre fe confervera toûjours, quelques differentes fituations qu'on donne à ce Levier, foit que ces poids de pefanteurs (*Hyp.*) proportionnelles dans chacun d'eux à fes differentes diftances du centre de la Terre, auquel on les fuppofe toûjours tendre, ayent leurs directions concourantes, ou (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) paralleles entr'elles, felon que ce centre fera finiment ou infiniment éloigné d'eux. Par confequent ce point ou appui d'équilibre perpe[illegible] fur la ligne droite qui enfile ces poids par leurs centres de forces particulieres, principes de leurs directions, s'appellant (*Déf.* 14.) *centre de gravité* commun à ces deux poids; il fuit que deux poids quelconques, foit (*Corol.* 7.) de directions concourantes toutes au centre de la Terre avec des pefanteurs proportionnelles pour chacun d'eux aux differentes diftances finies de ce centre à lui, foit (*Corol.* 8.) de directions toutes paralleles entr'elles avec des pefanteurs conftantes, & toûjours les mêmes, doivent toûjours avoir entr'eux un centre commun de gravité dans une ligne droite menée par leurs centres de forces particulieres, fur lequel ces deux poids fixes aux extrêmitez de cette ligne droite inflexible & fans pefanteur demeureroient toûjours en équilibre entr'eux, quelque varieté de fituations qu'on donnât à cette ligne droite ainfi p[illegible]fe pour un Levier.

COROLLAIRE X.

Donc tout poids de l'une ou de l'autre de ces deux hypothefes pouvant être regardé comme ainfi fait de deux autres, ou de deux parties ainfi en équilibre entr'elles fur quelqu'un de fes points, quelque fituation qu'on lui

donne; il suit necessairement de-là (*Corol.* 9.) qu'il n'y a point de poids qui dans l'une & dans l'autre de ces deux hypotheses, n'ait un centre de gravité toûjours le même; c'est-à-dire, un point toûjours le même, sur lequel appuyé ou soutenu, il ne demeurât en repos, quelque situation qu'on lui donnât autour de ce point fixe, ainsi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 42. du Th. 21. pour les poids de la seconde de ces deux hypotheses, qui est de poids faits de parties toutes de pesanteurs constantes & de directions toutes paralleles entr'elles.

SCHOLIE.

FIG. 195. 196. I. Le Corol. 7. qui vient de donner ces centres de gravité par le moyen des Corol. 8. 9. 10. qui en résultent, se peut encore démontrer par le moyen du Corol. 11. du Th. 21. Pour cela, après avoir mené les droites AB, Ab, dans les Fig. 195. 196. soit encore prise ſ pour la caracteristique des sinus, la Trigonométrie donnera AO. AX :: ſAXO. ſAOX :: ſAXB. ſAOB. Et Ax. Aω :: ſAωx. ſA$x\omega$ :: ſAωb. ſAxb. Donc (en multipliant par ordre) AO×Ax. AX×Aω :: ſAXB×ſAωb. ſAOB×ſAxb. Or en prenant E, e, pour les pesanteurs du même corps E en ces points, & F, f, pour les pesanteurs du même corps F en ces autres points, l'on aura (*Hyp.*) F. f :: AO. Aω. Et e. E :: Ax. AX. Ce qui (en multipliant par ordre) donne F×e. E×f :: AO×Ax :: AX×Aω. Donc on aura aussi F×e. E×f :: ſAXB×ſAωb. ſAOB×ſAxb (H).

Or la Trigonométrie donne pareillement BX. AB :: ſBAX. $ſAXB = \frac{AB \times ſBAX}{BX}$. Deplus BO. AB :: ſBAO. $ſAOB = \frac{AB \times ſBAO}{BO}$. Deplus encore $b\omega$. Ab :: ſbAω. $ſA\omega b = \frac{Ab \times ſbA\omega}{b\omega}$. Et enfin bx. Ab :: ſbAx. $ſAxb = \frac{Ab \times ſbAx}{bx}$.

Par consequent ſAXB. ſAOB :: $\frac{AB \times ſBAX}{BX}$. $\frac{AB \times ſBAO}{BO}$ ::

$\frac{\int BAX}{BX}. \frac{\int BAO}{BO}$. Et $\int A\omega b. \int Axb :: \frac{Ab\times\int bA\omega}{b\omega}. \frac{Ab\times\int bAx}{bx} ::$ $\frac{\int bA\omega}{b\omega}. \frac{\int bAx}{bx}$. Par consequent aussi $\int AXB\times\int A\omega b. \int AOB\times \int Axb :: \frac{\int BAX\times\int bA\omega}{BX\times b\omega}. \frac{\int BAO\times\int bAx}{BO\times bx}$ (la supposition de $BX = bx$, $BO = b\omega$, rendant $BX\times b\omega = BO\times bx$) :: $\int BAX\times\int BA\omega. \int BAO\times\int bAx$.

Donc suivant la précedente analogie H, l'on aura toûjours ici $F\times e : E\times f :: \int BAX\times\int bA\omega. \int BAO\times\int bAx$. Or l'équilibre supposé entre les poids en E, F, sur l'appui B, donne (*Th.* 21. *Corol.* 11. *nomb.* 1.) F. E :: $\int BAX. \int BAO$. Donc, en divisant par ordre la précedente analogie par celle-ci, l'on aura $e. f :: \int bA\omega. \int bAx$. Par consequent il y aura encore ici équilibre sur l'appui b (*Th.* 21. *Cor.* 11. *nomb.* 1.) entre les mêmes corps en $e. f$. Ainsi ces poids de pesanteurs chacun en raison de ses differentes distances au centre A de la Terre, une fois en équilibre entr'eux sur un point quelconque B de leur Levier en situation quelconque XO, conserveront toûjours cet équilibre sur le même appui B passé en b dans toute autre situation $x\omega$ qu'on voudra de ce même Levier, ainsi qu'on l'a déja vû dans le précedent Corol. 7. D'où l'on peut conclure ici comme là, les centres de gravité démontrez dans les Corol. 8. 9. 10. qui résultent de ce Corol. 7.

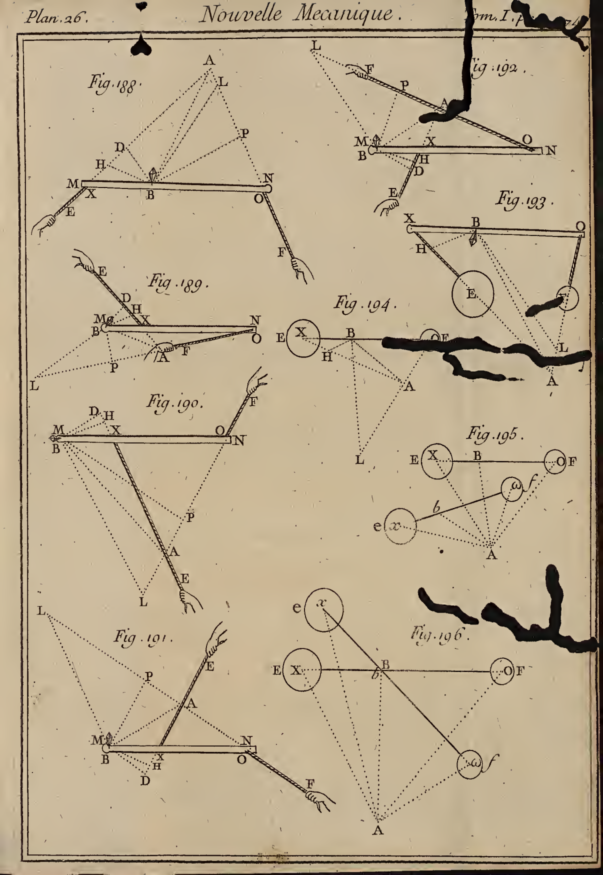
II. A l'occasion de ces centres de gravité, voici un Théoreme assez curieux, que j'ai vû quelque part, sans pouvoir me souvenir où je l'ai vû : je me souviens seulement que l'Auteur, après avoir supposé trois poids A, B, C, en raison de 1, 2, 3, de pesanteurs constantes, & de directions paralleles entr'elles, placez à volonté ; pour en trouver le centre commun de gravité, menoit par leurs centres particuliers deux droites AB, AC, qu'il divisoit en E, D, en raison reciproque des poids qui les terminoient : ensuite il menoit par ces points deux autres droi- FIG. 193.

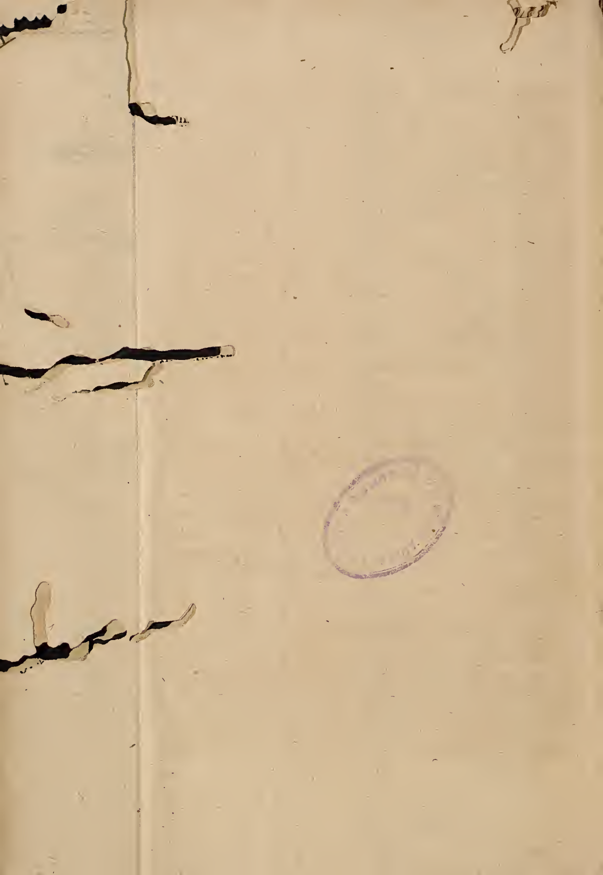
tes BD, CE, qui se coupoient en G; il prétendoit que ce point G étoit le centre commun de gravité de ces trois poids. Mais comme il ne les supposoit qu'en raison de 1, 2, 3, & qu'il paroissoit (autant que je peux m'en souvenir) vouloir toûjours avoir recours à des nombres, pour en faire la démonstration; voici le tout en general pour des poids quelconques, sans y employer de nombres.

Soit donc presentement trois poids quelconques A, B, C, lesquels soient aussi de pesânteurs constantes, & de directions paralleles entr'elles; que ces trois poids soient encore disposez comme l'on voudra. Je dis, comme cet Auteur, que la construction précedente, à laquelle il ajoûte EF parallele à BD, donnera toûjours le point G d'intersection des droites BD, CE, pour le centre commun de gravité de ces trois poids quelconques A, B, C.

Car la construction donnant C. A :: DA. $DC = \frac{A \times DA}{C}$.

Et A. B :: EB. EA. laquelle seconde analogie (en composant) donne A+B. B :: EB+EA. EA :: AB. EA :: BD. EF :: DA. FA. D'où résulte $EF = \frac{B \times BD}{A+B}$, & $FA = \frac{B \times DA}{A+B}$; & consequemment DF (DA−FA) $= DA - \frac{B \times DA}{A+B} = \frac{A \times DA}{A+B}$. L'on aura ici FC (DF+DC) $= \frac{A \times DA}{A+B} + \frac{A \times DA}{C} = \frac{\overline{A+B+C} \times A \times DA}{\overline{A+B} \times C}$; & consequemment (à cause de $DC = \frac{A \times DA}{C}$) FC. DC :: $\frac{\overline{A+B+C} \times A \times DA}{\overline{A+B} \times C}$. $\frac{A \times DA}{C}$ :: $\frac{A+B+C}{A+B}$. 1 :: A+B+C. A+B. Or les paralleles (*Hyp.*) EF, DC, rendent FC. DC :: FE. DG (à cause de $FE = \frac{B \times BD}{A+B}$) :: $\frac{B \times BD.}{A+B}$ DG :: B×BD. $\overline{A+B} \times DG$. Donc


Fig. 188.
Fig. 189.
Fig. 190.
Fig. 191.
Fig. 192.
Fig. 193.
Fig. 194.
Fig. 195.
Fig. 196.



A+B+C. A+B :: B×BD. A+B×DG. Ce qui (en divisant les consequens par A+B) rend A+B+C. 1 :: B×BD. DG. D'où résulte A+B+C. B :: BD. DG. Et (en retranchant les consequens) A+C. B :: BG. DG.

Or suivant les hypotheses qu'on fait ici de DA. DC :: C. A. & des pesanteurs constantes avec des directions paralleles de ces deux poids A, C, le point D de leur Levier AC étant (par les précedens Corol. 5. 8. & aussi par le Corol. 41. du Th. 21.) leur centre commun de gravité, & (*Th.* 21. *Corol.* 41.) chargé de la somme A+C de ces deux poids suivant une direction parallelele aux leurs, qu'on suppose aussi l'être à celle du poids B; le Levier BD se trouve ici chargé en B, D, de deux poids B, A+C, de pesanteurs constantes, & de directions paralleles entr'elles. Donc l'analogie A+C. B :: BG. DG. qu'on vient de trouver, donne ici (suivant les précedens Corol. 5. 8. & suivant le Corol. 41. du Th. 21.) le point G de ce Levier BD pour le centre commun de gravité de ces trois poids A, B, C. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Voilà pour le centre commun de gravité de trois poids de pesanteurs constantes, & de directions paralleles entr'elles, donnez de position arbitraire. Voici presentement pour trouver celui de trois poids de directions concourantes au centre de la Terre avec des pesanteurs pour chacun d'eux en raison des differentes distances de ce centre à chacun de leurs centres particuliers de gravité, démontrez dans le Corol. 10. *du précedent Th.* 23. *De ceci résultera encore une autre démonstration du précedent art.* 2. *dans le Corollaire du Théoreme suivant.*

THEOREME XXIV.

Soient trois poids quelconques A, B, C, entr'eux de position constante quelconque, & de pesanteurs qui pour chacun d'eux soient en raison des distances de son centre de gravité (démontré dans le Corol. 10. *du Th.* 23.) *à celui T de la Terre, auquel ces poids & leurs parties tendent toutes. Après avoir mené les droites AB, AG, par les centres de gravité A,* FIG. 1.

B, C, de ces trois poids, soient imaginées trois proportionnelles Ta, Tb, Tc, à ces trois poids A, B, C, prises depuis T sur leurs directions AT, BT, CT; des deux extrêmes Ta, Tc, de ces trois proportionnelles soit fait le parallelogramme SaTc, dont la diagonale ST rencontre la droite CA en D; de même des deux premieres Ta, Tb, de ces trois proportionnelles soit aussi fait le parallelogramme VaTb, dont la diagonale VT rencontre pareillement la droite AB en E.

Je dis que le point G de rencontre des deux droites BD, CE, sera le centre commun de gravité des trois poids proposez A, B, C, dans la position donnée entr'eux.

DEMONSTRATION.

I. La part. 6. du Th. 21. fait voir que les deux poids A, C, appliquez (comme on les voit) aux extrêmitez du Levier droit AC, feroient équilibre entr'eux sur le point D de ce Levier; & consequemment (*Th.* 23. *Corol.* 9.) que ce poids D seroit leur centre commun de gravité, duquel la charge seroit (*Th.* 21. *part.* 2. 3. 4.) de D vers T suivant la diagonale ST du parallelogramme S*a*T*c*, & à chacun de ces deux poids A, C, comme cette diagonale TS à chacune de leurs proportionnelles T*a*, T*c*.

On verra de même (*Th.* 21. *part.* 6.) que les deux poids A, B, appliquez (comme on les voit) aux extrêmitez du Levier droit AB, feroient équilibre entr'eux sur le point E de ce Levier; & consequemment (*Th.* 23. *Corol.* 9.) que ce point E seroit leur centre commun de gravité, duquel la charge seroit (*Th.* 21. *part.* 2. 3. 4.) de E vers T suivant la diagonale VT du parallelogramme V*a*T*b*, & à chacun de ces deux poids A, B, comme cette diagonale VT à chacune de leurs proportionnelles T*a*, T*b*.

II. Concevons presentement deux autres parallelogrammes, dont le premier soit ST*b*R, fait des proportionnelles (*art.* 1.) T*b*, TS, au poids B: & à la force résultante du concours des deux autres A, C; & dont le second soit VT*c*Z fait des proportionnelles (*art.* 1.) T*c*, TV, au poids C, & à la force résultante du concours des deux autres

tres

tres poids A, B. Le Corol. 10. du Lem. 3. fera voir dans le premier ST*b*R de ces deux parallelogrammes, que l'impression ou la force résultante du concours de ces trois poids A, B, C, sera de R vers T suivant la diagonale RT de ce parallelogramme, laquelle sera à chacune des proportionnelles de ces trois poids, comme cette force à chacun d'eux ; & dans le second VT*c*Z, que cette impression ou force résultante du concours des trois mêmes poids A, B, C, de position (*Hyp.*) constante entre eux, sera aussi de Z vers T suivant la diagonale ZT de cet autre parallelogramme, laquelle sera de même à chacune des proportionnelles de ces deux poids comme cette force à chacun d'eux : d'où l'on voit que ces deux diagonales RT, ZT, doivent ici se confondre en une, qui sera la direction vers T de toute la force résultante du concours des trois poids A, B, C ; & les points R, Z, se confondre aussi en un seul.

III. Donc (*princ. gener.*) le plan mobile BAC, dans lequel les centres de gravité de ces trois poids A, B, C, sont supposez fixement placez, demeurera immobile, & eux en équilibre entr'eux sur le point G, où ce plan est traversé par cette direction RT de l'impression ou force résultante (*art.* 2.) du concours de ces trois poids. Or des deux droites BD, CE, qui sont dans le plan BAC des centres de gravité A, B, C, de ces trois poids, la premiere BD étant (*constr.*) dans le plan ST*b* du parallelogramme ST*b*R avec sa diagonale RT, & la seconde CE étant aussi (*constr.*) dans le plan VT*c* du parallelogramme VT*c*Z avec sa diagonale ZT, ou (*art.* 2.) RT ; ces droites BD, CE, doivent rencontrer toutes deux cette direction RT au point G, où elle traverse le plan BAC des centres de gravité des poids. Donc ce plan avec ces trois poids, doit aussi demeurer en équilibre sur un appui placé au point G, où ces deux droites BD, CE, se rencontrent.

IV. Or quelque nouvelle situation qu'on donne à ce plan mobile, ou à ces trois poids A, B, C, de position

(*Hyp.*) constante entr'eux, le point d'équilibre D (*art.* 1.) des deux poids A, C, sur leur Levier AC, & celui E (*art.* 1.) des deux A, B, sur leur Levier AB, seront (*Th.* 23. *Corol.* 7.) toûjours les mêmes. Donc le point G de rencontre des deux droites BD, CE, & d'équilibre (*art.* 3.) entre ces trois poids A, B, C, sera aussi toûjours le même; & consequemment (*Déf.* 14.) ce point d'intersection G des droites BD, CE, sera le centre commun de gravité de ces trois poids A, B, C. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Si l'on prend presentement A, B, C, pour les masses des poids appellez jusqu'ici de ces noms, & encore leurs distances AT, BT, CT, au centre T de la Terre, pour les pesanteurs de chacun de leurs points ou parties égales; ces poids appellez jusqu'ici A, B, C, pour abreger, seront ici A×AT, B×BT, C×CT.

FIG. 200. Cela étant, si l'on suppose presentement le centre T de la Terre infiniment éloigné de ces poids de distances finies entr'eux, en sorte que (*Déf.* 11.) tous les angles en T soient infiniment aigus, & leurs complemens (à deux droits) en *a*, *b*, *c*, infiniment obtus; ce cas rendant (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) les droites AT, BT, CT, VT, RT, ST, toutes paralleles entr'elles, & les terminées en *a*, *b*, *c*, confondues (*Lem.* 6. *Corol.* 3.) avec *a*A, *b*B, *c*C; le tout comme dans la Fig. 200. Alors les distances AT, BT, CT, qui expriment (*Hyp.*) les pesanteurs des parties des poids A×AT, B×BT, C×CT, au centre T de la Terre, se trouvant toutes égales entr'elles; ces poids seront alors de directions toutes paralleles entr'elles, & de pesanteur constante, qui les rendra pour lors en raison de leurs masses A, B, C: ainsi les points E, D, d'équilibre (*art.* 1.) de ces poids deux à deux sur leurs Leviers droits AB, AC, divisant alors (*Th.* 21. *Corol.* 13.) chacun de ces Leviers en raison reciproque des deux poids appliquez à ses extrêmitez; le present Th. 24. fait consequemment voir qu'en divisant ainsi ces deux Leviers AB, AC, par

deux droites CE, BD, le point G d'intersection de ces deux droites sera encore ici le centre commun de gravité des trois poids quelconques A, B, C, de pesanteurs constantes, & de directions paralleles entr'elles, ainsi qu'on l'a déja vû d'une autre maniere dans l'art. 2. du Schol. du Th. 23.

DEFINITION XXIV.

De plusieurs forces ou puissances appliquées à un Levier, j'appelle *contraires* celles qui tendent à lui donner des mouvemens contraires autour de son point fixe ; & *conspirantes* entr'elles, celles qui tendent à le mouvoir en même sens autour de cet appui, soit que les points d'application des conspirantes de chaque part, soient tous, ou non, du même côté de cet appui. Suivant ces noms, les puissances M, N, qui dans les Fig. 201. 202. 203. tendent chacune à faire tourner de bas en haut le bras BG du Levier AG autour de son appui fixe B, seront appellées *conspirantes* entr'elles ; de même les puissances O, P, Q, qui tendent chacune à faire tourner de haut en bas ce bras BG de ce Levier autour de ce même appui B, seront aussi appellées *conspirantes* entr'elles : mais ces deux mouvemens étant contraires entr'eux, ces trois puissances O, P, Q, seront appellées *contraires* aux deux autres M, N, & ces deux-ci à ces trois-là. Les *Momens* (Momenta) de ces puissances seront aussi appellez *conspirans* ou *contraires*, selon que ces puissances le seront. Enfin la somme des *Momens* conspirans d'une part, sera aussi appellée *contraire* à celle des conspirans en sens contraire de l'autre part. Fig. 201. 202. 203.

Il est cependant à remarquer qu'on n'appelle ici *contraires* les forces ou leurs momens, qu'à raison des mouvemens contraires, que ces forces séparément prises causeroient au Levier autour de son appui ; puisque concourant toutes ensemble, elles conspirent & se réduisent toutes (*princ. gener.*) à une seule contre ce Levier, lequel demeurera en repos, ou non, & en consequence

toutes ces puiſſances en équilibre, ou non ; ſelon que la direction de cette force réſultante de leur concours paſſera, ou non, par l'appui de ce Levier.

THEOREME XXV.

Fig. 201. 202. 203. *Tant de puiſſances qu'on voudra M, N, O, P, Q, &c. étant appliquées en autant de points A; C, E, H, G, &c. d'un Levier quelconque AG ſuivant des directions quelconques en un même plan ; du concours V de celles HP, GQ, de deux quelconques P, Q, de ces puiſſances, ſoient priſes ſur ces deux directions HP, GQ, des parties VR, VS, proportionnelles à ces deux puiſſances P, Q : après en avoir fait le parallelogramme VRKS, dont la diagonale KV prolongée rencontre le Levier en λ, & en T la direction OE prolongée de la puiſſance O ; ſur ces deux lignes Tλ, TO, ſoient pris TY=VK, & TZ. VR :: O. P. De même après avoir fait le parallelogramme TYXZ, dont la diagonale TX prolongée de part & d'autre rencontre le Levier en F, & en β la direction NC prolongée de la puiſſance N ; ſur ces deux lignes βF, βC, ſoient priſes βγ=TX, & βε. VR :: N. P. De même encore, après avoir fait le parallelogramme βεδγ, dont la diagonale βδ prolongée rencontre en D le Levier prolongé, & en L la direction prolongée AM de la puiſſance M ; ſur ces deux lignes βL, AL, prolongées ſoient priſes Lθ=βδ, & Lω. VR :: M. P. Et toûjours de même juſqu'à la derniere de tout ce qu'il pourroit y avoir ici d'autres puiſſances, deſquelles on dira ce qu'on va voir des cinq qu'on y voit, deſquelles la derniere étant M, je dis,*

I. *Que ſi des côtez Lθ, Lω, qu'on vient de déterminer, on fait un parallelogramme LθIω, dont la diagonale IL prolongée vers le Levier, le rencontre en B ; un appui fixe en ce point B du Levier, ſoûtiendra en équilibre entr'elles toutes les cinq puiſſances M, N, O, P, Q, qu'on ſuppoſe ici appliquées à ce Levier.*

II. *Reciproquement s'il y a ici équilibre ſur l'appui B entre les cinq puiſſances qu'on y ſuppoſe données, & de directions don-*

nées ; la diagonale prolongée LI du dernier Lθ Iω des quatre parallelogrammes qu'on voit ici, passera par cet appui B.

III. *La charge de cet appui B résultante du concours d'action de toutes les puissances, sera dirigée de B vers I suivant la diagonale LI du parallelogramme LθIω.*

IV. *Cette charge sera à chacune de ces puissances M, N, O, P, Q, comme cette diagonale LI à chacun des côtez Lω, βε, TZ, VR, VS ; que les parallelogrammes LθIω, βεδγ, TZXY, VRKS, ont sur les directions de ces puissances.*

V. *En ce cas d'équilibre sur l'appui B du Levier AG, si de ce point B on mene sur ces directions prolongées AM, NC, EO, PH, GQ, autant de perpendiculaires* Ba, Bc, Be, Bh, Bg, *qui les rencontrent en* a, c, e, h, g, *l'on aura toûjours* $M \times Ba + N \times Bc = O \times Be + P \times Bh + Q \times Bg$.

VI. *Reciproquement si l'on a ici* $M \times Ba + N \times Bc = O \times Be + P \times Bh + Q \times Bg$, *il y aura équilibre sur l'appui fixe B entre les cinq puissances M, N, O, P, Q, qu'on y suppose données & de directions données AM, NC, EO, PH, QG, ausquelles on suppose aussi que* Ba, Bc, Be, Bh, Bg, *sont perpendiculaires.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Ayant (*constr.*) la puissance P à chacune des quatre autres Q, O, N, M, comme le côté VR que le parallelogramme VRKS a sur la direction PG prolongée de cette puissance P, est à chacun des côtez VS, TZ, βε, Lω, que ce parallelogramme & les trois autres qu'on voit ici, ont sur les directions de ces quatre autres puissances Q, O, N, M ; ces cinq lignes VR, VS, TZ, βε, Lω, sont proportionnelles à ces cinq puissances P, Q, O, N, M.

Si presentement on appelle λ l'effort résultant du concours des puissances P, Q ; F, le résultant du concours de λ & de la puissance O ; D, le résultant du concours F & de la puissance N ; & B, le résultant de D & de la puissance M : les proportionnelles précedentes jointes aux suppositions faites d'abord de TY = VK, βγ = TY, Lθ = βδ ; donneront (*Lem. 3. Corol. 1. nomb. 1. 2.*) l'effort λ

(résultant du concours des puissances P, Q,) de V vers K suivant VK, & λ. P :: VK. VR (*constr.*) :: TY. VR. De sorte qu'ayant (*constr.*) P. O :: VR. TZ. l'on aura aussi (en raison ordonnée) λ. O :: TY. TZ. Par conséquent l'effort F résultant du concours de l'effort λ & de la puissance O, c'est-à-dire, du concours des trois puissances P, Q, O, sera de même de T vers X suivant TX, & à la puissance O :: TX. TZ. De sorte qu'ayant (*constr.*) O. P :: TZ. VR. & P. N :: VR. βε. l'on aura aussi F. N :: TX. βε (*constr.*) :: βγ. βε. Donc par la même raison l'effort D résultant du concours de l'effort F & de la puissance N, c'est-à-dire, du concours des quatre puissances P, Q, O, N, sera de β vers δ suivant βδ, & à la puissance N :: βδ. βε. De sorte qu'ayant (*constr.*) N. P :: βε. VR. & P. M :: VR. Lω. l'on aura aussi D. M :: βδ. Lω (*constr.*) :: Lθ. Lω. Donc par la même raison encore l'effort B résultant du concours de l'effort D & de la puissance M, c'est-à-dire, du concours des cinq puissances P, Q, O, N, M, sera de L vers I suivant la diagonale LI du parallelogramme LθIω. Donc enfin (*princ. gen. Corol.* 1.) ces cinq puissances seront en équilibre entr'elles sur un appui fixe placé au point B, où cette diagonale LI prolongée rencontre le Levier. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

PART. II. Pour l'équilibre sur l'appui B entre toutes les puissances qu'on suppose appliquées au Levier AG, il faut (*princ. gen. Corol.* 2.) que cet appui B se trouve dans la direction de l'effort résultant du concours d'action de toutes ces puissances. Or suivant la démonstration de la part. 1. la direction de cet effort commun est ici de L vers I suivant la diagonale LI du parallelogramme LθIω. Donc en cas d'équilibre entre toutes ces puissances M, N, O, P, Q, sur l'appui fixe B du Levier auquel on les suppose appliquées ; cette diagonale LI prolongée passera par cet appui B. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

PART. III. Suivant la démonstration de la partie 1. tout ce que les puissances M, N, O, P, Q, font ensemble d'effort sur le Levier AG, se réduisant à leur

effort commun de L vers I suivant LI ; & l'appui fixe B placé dans cette direction ou ligne prolongée, soûtenant (*Ax.* 3.) cet effort tout entier qui (*Déf.* 21.) en fait toute la charge : c'est une consequence necessaire que la direction de la charge de cet appui fixe B soit ici de L vers I suivant LI diagonale du parallelogramme LθIω. *Ce qu'il falloit* 3°. *démontrer.*

Part. IV. Suivant la démonstration de la partie 1. l'effort D non seulement résulte de β vers δ suivant βδ, du concours des quatre puissances N, O, P, Q, mais encore est à la puissance M : : Lθ. Lω. Donc (*Lem.* 3. *Cor.* 1. *nomb.* 2.) l'effort B, qui suivant la démonstration de la partie 3. est la charge de l'appui de ce nom, résultante du concours de cet effort D & de cette puissance M, c'est-à-dire, du concours des cinq puissances M, N, O, P, Q, est à cette puissance M, comme la diagonale LI du parallelogramme LθIω est à son côté correspondant Lω, ou (ce qui revient au même) B. M : : LI. Lω. Mais (*constr.*) M. P : : Lω. VR. Donc aussi (en raison ordonnée) la charge B. P : : LI. VR. Or (*constr.*) la puissance P est à chacune des quatre autres Q, O, N, M, comme le côté VR du parallelogramme VRKS est à chacun des côtez correspondans VS, TZ, βε, Lω, de ce parallelogramme & des trois autres TZXY, βεδγ, LωIθ. Donc (en raison ordonnée) la charge B de l'appui de ce nom, résultante du concours des cinq puissances proposées M, N, O, P, Q, est à chacune de ces puissances, comme la diagonale LI du dernier LωIθ de ces parallelogrammes, est à chacun des côtez Lω, βε, TZ, VR, VS, que tous ces parallelogrammes ont sur les directions de ces puissances. *Ce qu'il falloit* 4°. *démontrer.*

Part. V. Il faut ici se souvenir que dans la construction faite dans l'énoncé du present Th. 25. on a pris Lθ=βδ, βγ=TX, TY=VK : cela joint au Corol. 1. du Lem. 16. donnera Lω×Ba (*Lem.* 16. *Corol.* 1. *nomb.* 4.) =Lθ×Bd=βδ×Bd (*Lem.* 16. *Corol.* 1. *nomb.* 2.) =βγ×Bf−βε×Bc=−βε×Bc+TX×Bf (*Lem.* 16. *Cor.* 1. *nomb.* 1.)

$= -\beta\varepsilon \times Bc + TZ \times Be + TY \times Bl = -\beta\varepsilon \times Bc + TZ \times Be + VK \times Bl$ (*Lem.* 16. *Corol.* 1. *nomb.* 1.) $= -\beta\varepsilon \times Bc + TZ \times Be + VS \times Bg + VR \times Bh$. Donc $L\omega \times Ba + \beta\varepsilon \times Bc = TZ \times Be + VS \times Bg + VR \times Bh$.

Or (*conſtr.*) $\begin{cases} P.\ M :: VR.\ L\omega = \frac{M \times VR}{P}. \\ P.\ N :: VR.\ \beta\varepsilon = \frac{N \times VR}{P}. \\ P.\ O :: VR.\ TZ = \frac{O \times VR}{P}. \\ P.\ Q :: VR.\ VS = \frac{Q \times VR}{P}. \end{cases}$

Donc en ſubſtituant toutes ces valeurs de $L\omega$, $\beta\varepsilon$, TZ, VS, dans la derniere équation qui précede ces analogies, elle ſe changera en $\frac{M \times VR \times Ba + N \times VR \times Bc}{P} = \frac{O \times VR \times Be + Q \times VR \times Bg}{P} + VR \times Bh$. Donc auſſi en multipliant le tout par $\frac{P}{VR}$, l'on aura enfin dans le cas d'équilibre ici ſuppoſé, $M \times Ba + N \times Bc = O \times Be + Q \times Bg + P \times Bh$. *Ce qu'il falloit* 5°. *démontrer.*

PART. VI. Je dis reciproquement que ſi $M \times Ba + N \times Bc = O \times Be + Q \times Bg + P \times Bh$, il y aura équilibre ſur le point fixe B du Levier AG entre les puiſſances M, N, O, P, Q, qu'on lui ſuppoſe appliquées. Car ſi elles ne demeuroient pas ainſi en équilibre toutes enſemble ſur cet appui fixe B, il y en auroit quelqu'une d'elles, par exemple, M, qui ſeroit trop grande ou trop petite pour cela. En ce cas (tout le reſte demeurant le même) ſoit quelqu'autre puiſſance μ ſubſtituée à la place de M, & qui tirant le cordon AM de celle-ci vers le même côté, & ſuivant la même direction qu'elle, demeure en équili-

bre

bre sur ce même appui B avec les quatre autres puissances N, O, P, Q, ausquelles on n'ait rien changé. En ce cas d'équilibre sur cet appui B entre ces cinq puissances μ, N, O, P, Q, dirigées (*Hyp.*) comme les cinq M, N, O, P, Q, & en même sens qu'elles: la part. 5. donneroit $\mu \times Ba + N \times Bc = O \times Be + Q \times Bg + P \times Bh$. Mais en cas d'équilibre sur ce même appui B entre les cinq dernieres ainsi dirigées, la même part. 5. vient de donner aussi $M \times Ba + N \times Bc = O \times Be + Q \times Bg + P \times Bh$. Donc on auroit alors $\mu \times Ba = M \times Ba$, c'est-à-dire, $\mu = M$. Par consequent puisque (*Hyp.*) la puissance μ feroit ici équilibre sur l'appui B avec les quatre N, O, P, Q; la puissance M renduë à son cordon AM au lieu de cette puissance μ, & dirigée (*Hyp.*) comme elle, & en même sens, demeurera de même en équilibre avec ces quatre autres puissances N, O, P, Q, sur le même appui B. Donc si $M \times Ba + N \times Bc = O \times Be + Q \times Bg + P \times Bh$, il y aura équilibre sur cet appui fixe B du Levier AG entre les cinq puissances M, N, O, P, Q, qu'on lui suppose appliquées. *Ce qu'il falloit 6°. démontrer.*

COROLLAIRE I.

Les produits qui composent les égalitez des part. 5. 6. exprimant (*Déf.* 22.) les forces relatives ou *Momens*. (*Momenta*) des puissances qui s'y trouvent multipliées chacune par la distance de sa direction à l'appui B du Levier AG, auquel elles sont appliquées, & ce qu'on y vient de voir des cinq precedentes puissances M, N, O, P, Q, convenant de même à ce qu'on voudroit en supposer d'autres quelconques appliquées à ce Levier quelconque, & de directions à volonté;

1°. La part. 5. fait voir qu'en cas d'équilibre entre toutes ces puissances sur l'appui du Levier auquel on les suppose appliquées, les sommes contraires de *Momens* seront toûjours égales entr'elles, c'est-à-dire (*Déf.* 24.) que la somme de leurs momens conspirans à faire tourner le Levier en un sens sur son appui, sera toûjours

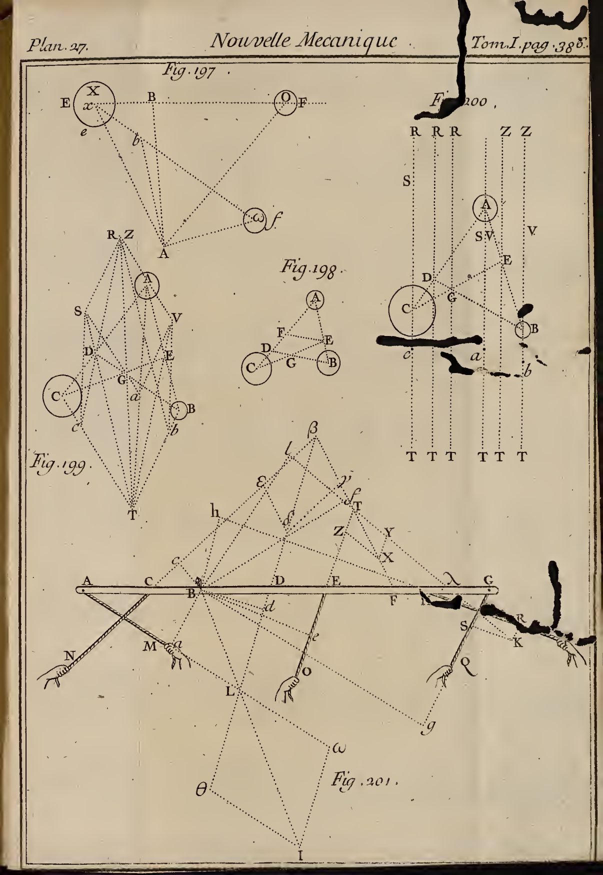
alors égale à la somme des conspirans à le faire tourner en sens contraire sur cet appui, ainsi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 9. du Th. 21.

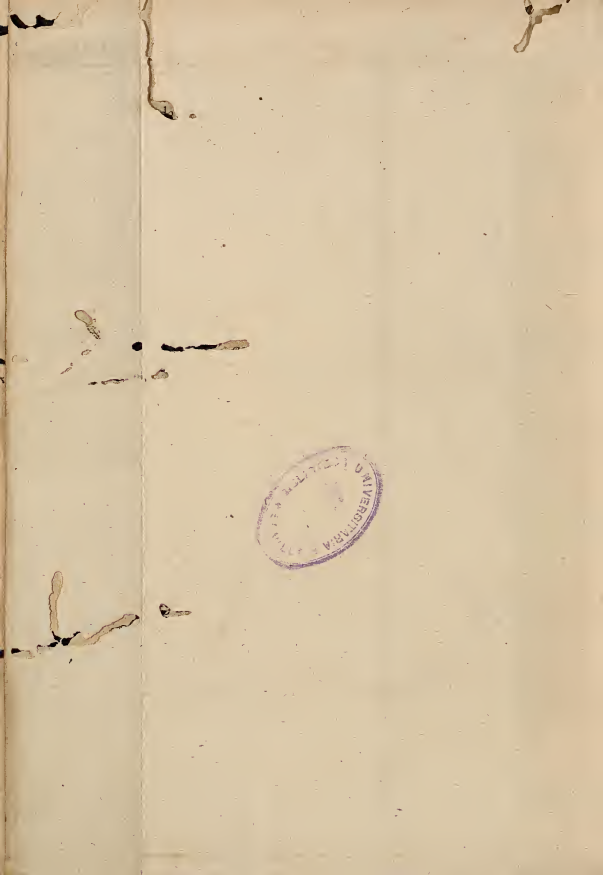
2°. La part. 6. fait reciproquement voir que lorsque ces deux sommes de *Momens* seront égales entr'elles, il y aura toûjours équilibre entre toutes ces puissances sur l'appui fixe du Levier auquel on les suppose appliquées, ainsi qu'on l'a aussi déja vû dans le Corol. 9. du Th. 21.

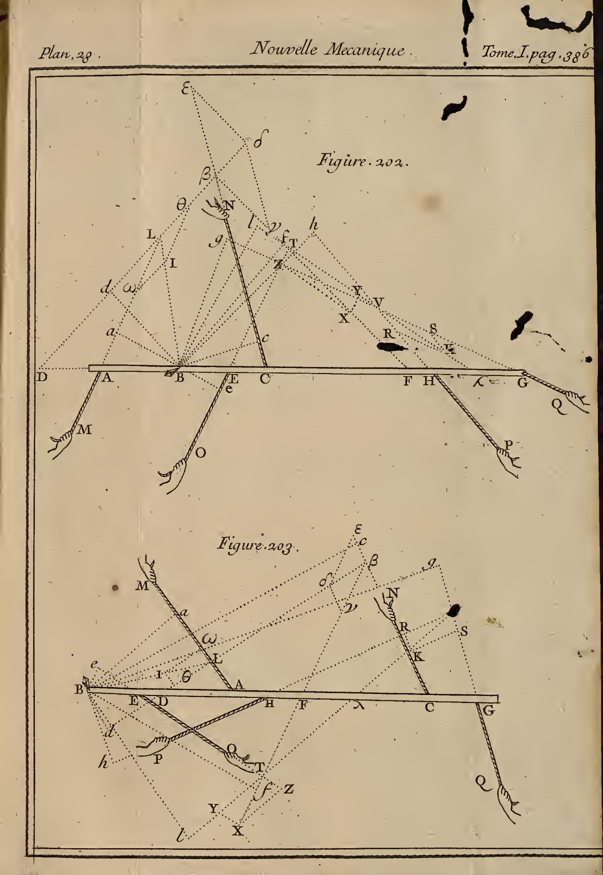
COROLLAIRE II.

Cela étant, on voit qu'en cas d'équilibre entre plusieurs puissances sur l'appui fixe d'un Levier quelconque, on peut en changer à son gré les directions & les points d'application à ce Levier, même d'un côté à l'autre de l'appui, sans que ces puissances cessent de faire équilibre entr'elles sur ce Levier mobile autour de cet appui, pourvû (*Corol.* 1. *nomb.* 2.) qu'on les y applique suivant des directions & vers des côtez qui rendent toûjours leurs sommes contraires de *Momens* égales entr'elles. D'où il suit que toutes ces puissances quelconques, en quelque nombre qu'elles soient, peuvent demeurer en équilibre entr'elles sur le même appui de ce Levier quelconque suivant une infinité de directions en une infinité de points d'application à ce Levier.

FIG. 201. 202. C'est pour cela que nonobstant le passage du point C d'application de la puissance N d'un côté à l'autre de l'appui B dans les Figures 201. 202. en la faisant tirer dans une de ces Figures vers un côté opposé à celui vers lequel elle tiroit dans l'autre, & suivant une direction, dont la distance à l'appui B soit égale à celle de cet appui à l'autre direction qu'elle avoit de l'autre côté de lui; cette puissance N, qui aura encore ici (*Déf.* 21.) le même *Moment* qu'auparavant, & de même des autres puissances M, O, P, Q, ausquelles (*Hyp.*) on n'a rien changé, fera encore (*Corol.* 1. *nomb.* 2.) équilibre avec elles sur le même point d'appui B qu'auparavant: puisque de


Fig. 197.
X
E
x
B
O
F
e
b
ω
f
A
Fig. 198.
A
F
E
D
C
G
B
Fig. 199.
R Z
A
S
V
D
E
G
C
a
B
c
b
T
Fig. 200.
R R R
Z Z
S
A
S V
V
E
D
C
G
B
c
a
b
T T T T T T
Fig. 201.
β
l
ε
γ
δ
T
h
δ
Z
Y
X
c
A
C
D
E
λ
G
B
F
d
S
K
N
M
a
e
O
Q
L
g
ω
θ
I


UNIVERSITARIA

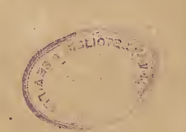

Figure. 202.
ε
δ
β
θ
N
l
γ
h
L
g
f
T
I
Z
d
ω
Y
V
X
a
R
S
c
D
A
B
E
e
C
F
H
G
Q
M
P
O
Figure. 203.
ε
c
β
g
δ
N
M
a
ω
R
S
L
K
e
I
θ
A
B
E
D
H
F
C
G
d
h
P
O
T
f
Z
Q
Y
l
X



cette manière les sommes contraires de *Momens* sont encore ici égales entr'elles.

C'est aussi pour cela que les puissances M, N, appliquées du même côté que toutes les autres O, P, Q, par rapport à l'appui B dans la Fig. 203. y font équilibre avec ces trois autres puissances, comme dans la Fig. 201. où ces deux-là sont de l'autre côté de cet appui tendant vers un côté opposé à celui vers lequel elles tendent dans la Fig. 203. & suivant des directions qui leur donnent encore ici une somme de Momens égale à celle qu'elles ont là, rien n'ayant (*Hyp.*) changé dans les autres. Fig. 201. 203.

Fin du premier Tome.






A 077(240)/124
UNIVERSIDAD DE SEVILLA
BUS
600157617
i 24647603

77

NOUVELL
MECANIQ

TOM. I.





